

## Exercices

1) Si  $f$  est de classe  $C^2$ , alors l'admet un D.L. en  $a$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ : donné par la formule de Taylor Young.

$$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + o(h^2)$$

$$f(x-a) = f(x) - a f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + o(h^2)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x) + o(h^2)}{h^2} = f''(x) < \infty$$

$$\Rightarrow D^2 f(x) = f''(x)$$

$$\Rightarrow f \text{ continue sur } \mathbb{R}$$

$$D^2 f(x) = 0$$

2) Puisque  $f$  est continue, alors les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .

$$\varphi(a) = 0$$

$$\varphi(b) = 0$$

$$\text{ii) } \frac{\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x)}{h^2} =$$

$$\frac{f(x+h) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x+h-a) - \varepsilon(x+h-a)}{h^2} + \frac{f(x-h) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-h-a) - \varepsilon(x-h-a)}{h^2}$$

## Correction Série Révision Analyse

$$-2f(x) + 2f(a) + 2 \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + 2\varepsilon(x-a)(b-a)$$

$$= \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} + 2\varepsilon$$

$\Rightarrow \varphi$  admet une primitive dérivée avec.

$$D^2 \varphi(x) = D^2 f(x) + 2\varepsilon = 2\varepsilon$$

$$\text{iii) } \text{Puisque } f \text{ est continue sur } [a, b] \text{ donc } f \text{ est bornée.}$$

5) Supposons que  $\varphi$  admet en  $x_0$  un max et  $\varphi$  positif. Alors

$$\varphi(x_0+h) + \varphi(x_0-h) \leq 2\varphi(x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x_0+h) + \varphi(x_0-h) - 2\varphi(x_0)}{h^2} \leq 0$$

$$\text{Alors } D^2 \varphi(x_0) \leq 0 \text{ absurde.}$$

6) D'après 5) on déduit que  $\forall x \in \mathbb{R}: \varphi(x) \leq 0$

$$\Rightarrow f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \leq \varepsilon(x-a)(b-a)$$

$$\varepsilon \rightarrow 0, \text{ on obtient: } f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \leq 0$$

Mais raisonnons que ce qui précède  
 on déduit que  $\forall \gamma, 0, \text{ puis }$   
 que  $f(x) - f(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a)$   
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}:$   
 $f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a),$   
 $\Rightarrow f$  affine.

Neerav Noval

(2)

## Exercice 4

1) La fonction  $f(x) = \ln x$  est  $C^2$  sur  $[e, \frac{e}{2}]$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0, \forall x \in [e, \frac{e}{2}]$$

$\Rightarrow$  f est concave -

D'où la courbe de f est au dessus de

la corde passant par les points

$$(0,0) \text{ et } A(\frac{e}{2}, 1).$$

$$\Rightarrow f(x) > \frac{2}{e}x; \forall x \in [e, \frac{e}{2}]$$

$$2) a) \ln(1+x) \leq x; \forall x > -1$$

1<sup>ère</sup> méthode

Etude de fonctions

2<sup>ème</sup> méthode

$$\text{Soit } f(x) = \ln(1+x), x > -1.$$

$$f \in C^1 \text{ sur } ]-1, +\infty[.$$

D'après  $\dots \forall x \in ]-1, +\infty[$

$$\exists c \in ]0, x[ \text{ (ou } ]x, 0[) \text{ tq}$$

$$f(x) = f(0) + x f'(c) = \frac{x^2}{2} f''(c).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} \frac{1}{(1+c)^2}$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) \leq x.$$

Le neutrat est aussi vrai pour  $x=0$

3<sup>ème</sup> méthode

La fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  est concave

et la courbe de f est au dessus de

la tangente au point  $(0,0)$

Puisque f est concave

$$y = x \text{ (tangent)}$$

$$f(x) = \ln(1+x) \leq x; \forall x > -1.$$

b) Meille chose que d)

3) La fonction  $x \mapsto \ln x$  est concave.

alors d'après l'inégalité de Jensen pour

$$x_i > 0 \text{ et } d_i = \frac{1}{n}; \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\geq \ln\left(\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow e^{-x} \leq e^{-1} + e^{-x}, \quad x \geq 1$$

5) Soit  $\lambda \geq 0$ .

On pose  $f(x) = x^k e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$

$f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$

$$f'(x) = k x^{k-1} e^{-\lambda x} - \lambda x^k e^{-\lambda x}$$

$$= x^{k-1} e^{-\lambda x} (k - \lambda x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{k}{\lambda}$$

$$\xrightarrow{TV} \sup_{x \in [0, +\infty[} f(x) = f\left(\frac{k}{\lambda}\right)$$

$$= \left(\frac{k}{\lambda}\right)^k e^{-k}$$

$$\Rightarrow \forall x \geq 0: f(x) \leq \left(\frac{k}{\lambda}\right)^k e^{-k}$$

### Exercice 5

a)  $\forall \alpha, \beta \in [\alpha, \beta]; \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$0 < \beta - \alpha \mid e^{\lambda \beta} \leq (\beta - \alpha) e^{\lambda \alpha} + (\beta - \alpha) e^{\lambda \beta}$$

$$\Leftrightarrow 0 < e^{\lambda \beta} \leq \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} e^{\lambda \alpha} + \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} e^{\lambda \beta}$$

Soit  $f(x) = e^{\lambda x}$  est convexe.

$$t_1 = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha}$$

$$t_1 + t_2 = 1$$

$$f(t_1 \alpha + t_2 \beta) \leq t_1 f(\alpha) + t_2 f(\beta)$$

$$\Rightarrow e^{\lambda \beta} \leq \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} e^{\lambda \alpha} + \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} e^{\lambda \beta}$$

b) Pour  $y = 0$ , on obtient:

$$0 < \beta - \alpha < \beta e^{\lambda \alpha} - \alpha e^{\lambda \beta}$$

c) Soit  $\varphi(\lambda) = \ln(\beta e^{\lambda \alpha} - \alpha e^{\lambda \beta}) - \frac{(\beta - \alpha)}{\lambda} e^{\lambda \beta}$

$\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi'(\lambda) = \frac{\beta \alpha (e^{\lambda \alpha} - e^{\lambda \beta})}{\beta e^{\lambda \alpha} - \alpha e^{\lambda \beta}} - \frac{(\beta - \alpha)}{\lambda} e^{\lambda \beta}$$

$$\varphi''(\lambda) = \beta \alpha \left[ \frac{\alpha e^{\lambda \alpha} - \beta e^{\lambda \beta}}{\beta e^{\lambda \alpha} - \alpha e^{\lambda \beta}} \right] \left( \frac{\beta e^{\lambda \alpha} - \alpha e^{\lambda \beta}}{\beta e^{\lambda \alpha} - \alpha e^{\lambda \beta}} \right) - \frac{(\beta - \alpha)}{\lambda^2} e^{\lambda \beta}$$

$$= \beta \alpha \left[ \frac{\alpha^2 e^{\lambda \alpha} - \beta^2 e^{\lambda \beta}}{(\beta e^{\lambda \alpha} - \alpha e^{\lambda \beta})^2} \right] - \frac{(\beta - \alpha)}{\lambda^2} e^{\lambda \beta}$$

$$= - \frac{(\beta - \alpha)^2}{\lambda^2} \left( \frac{\beta e^{\lambda \alpha} + \alpha e^{\lambda \beta}}{\beta e^{\lambda \alpha} - \alpha e^{\lambda \beta}} \right) e^{\lambda \beta} \leq 0$$

$\Rightarrow \varphi'$  est décroissante

Donc  $\varphi'(\lambda) \leq \varphi'(0) = 0$

$\Rightarrow \varphi$  est décroissante  $\Rightarrow \varphi(\lambda) \leq \varphi(0) = 0$

## Exercice 6

$$(E): y'(t) - \frac{t}{t^2+2} y(t) = -f(t).$$

$$1) (H): y'(t) - \frac{t}{t^2+2} y(t) = 0$$

$$y_h(t) = c e^{\frac{t^2}{2t^2+2}}$$

On cherche une solution particulière de (E)

dans la forme:

$$y_p(t) = c(t) e^{\frac{t^2}{2t^2+2}} \quad \text{hg}$$

$$c'(t) = -\frac{f(t)}{e^{\frac{t^2}{2t^2+2}}} = -f(t) e^{-\frac{t^2}{2t^2+2}}.$$

$$\Rightarrow c(t) = - \int_0^t f(t) e^{-\frac{t^2}{2t^2+2}} dt + c_0$$

$$\Rightarrow y_p(x) = - \left( \int_0^x f(t) g_\sigma(t) dt \right) \cdot \text{est une}$$

solution particulière de (E)

Ainsi l'ensemble de toutes les solutions de (E) est:

$$y(x) = \frac{c}{g_\sigma(x)} - \frac{\int_0^x g_\sigma(t) g_\sigma(t) dt}{g_\sigma(x)}.$$

La solution de (E)  $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ hg}$

$$y(x) = \frac{c - \int_0^x g_\sigma(t) g_\sigma(t) dt}{g_\sigma(x)}.$$

$$2) y(x) = \frac{1}{g_\sigma(x)} \cdot \left( \int_x^{\pi} f(t) g_\sigma(t) dt \right)$$

$$= \frac{1}{g_\sigma(x)} \left( \underbrace{\int_0^{\pi} f(t) g_\sigma(t) dt}_{\text{cte.}} - \int_0^x f(t) g_\sigma(t) dt \right)$$

$\Rightarrow y$  est une solution de (E).

3) Supposons qu'il existe solutions

$y_1$  de (E)

$$\Rightarrow \exists C_1 \in \mathbb{R} \quad \text{hg.}$$

$$\exists C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y_1 - y_2(x) = \frac{(C_1 - C_2)}{g_\sigma(x)} = (C_1 - C_2) e^{\frac{x^2}{2x^2+2}}$$

Comme  $y_1$  et  $y_2$  sont bornées, alors

$y_1 - y_2$  est bornée.

$$\text{Alors } C_1 - C_2 = 0 \quad (\text{si non } \lim_{x \rightarrow +\infty} y_1 - y_2(x) = \pm \infty)$$

$$\Rightarrow C_1 = C_2.$$

## Exercice 8

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k - tx \, dt. \quad x \geq 0. \quad k \in \mathbb{N}.$$

$\forall k \in [0, 1],$  la fonction  $x \mapsto t^k$  est décroissante

Alors la fonction  $f_k$  est décroissante

$$2) f_k(0) = \int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1} \quad k \rightarrow +\infty$$

(5)

$$\forall x \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq f_k(x) \leq f_k(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = 0$$

$$\begin{aligned} 3) f_0(x) &= \int_0^x e^{-tx} dt \\ &= -\frac{1}{x} [e^{-tx}]_0^x \\ &= \frac{1 - e^{-x}}{x} \end{aligned}$$

$$4) x \gg 0, f_{k+1}(x) = \int_0^x t^{k+1} e^{-tx} dt$$

$$\begin{aligned} \text{IPP: } u &= t^{k+1}, & u' &= (k+1)t^k \\ v &= e^{-tx}, & v' &= -e^{-tx} \end{aligned}$$

$$f_{k+1}(x) = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{k+1}{x} \int_0^x t^k e^{-tx} dt$$

$$= \frac{k+1}{x} f_k(x) - \frac{e^{-x}}{x}$$

5) changement de variable  $u = tx$ .

b)  $x \mapsto \int_0^x u^k e^{-u} du$  est une primitive.

alors elle est dérivable sur  $]0, +\infty[$

$x \mapsto \frac{1}{x^{k+1}}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$

$$\Rightarrow f_k \text{ est dérivable sur } ]0, +\infty[$$

$$\text{et } f_k'(x) = -\frac{k+1}{x^{k+2}} \int_0^x u^k e^{-u} du + \frac{x^k e^{-x}}{x^{k+1}}$$

$$= -\frac{k+1}{x^{k+2}} \int_0^x u^k e^{-u} du + \frac{e^{-x}}{x}$$

$$\begin{aligned} 2) f_k'(x) &= -\frac{k+1}{x} f_k(x) + \frac{e^{-x}}{x} \\ &= -f_{k+1}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) a) \text{ voir ex. } b) f_k(x) - f_k(0) &= \int_0^x t^k (e^{-tx} - 1) dt \\ &= \int_0^x t^k dt - \int_0^x t^k dt \\ &= -\frac{x^{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$

De plus  $f_k$  est décroissante.  $\Rightarrow$   
 $\forall x \geq 0, -\frac{x^{k+1}}{k+1} \leq f_k(x) - f_k(0) \leq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = f_k(0)$$

$\Rightarrow f_k$  est continue en 0  
 et  $f_k$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$

$$\Rightarrow f_k' = -f_{k+1} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 0}} f_k \text{ est } C^1 \text{ sur } ]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_k'(x) = -\lim_{x \rightarrow 0} f_{k+1}(x) = -f_{k+1}(0)$$

$$\Rightarrow f_k \text{ est } C^1 \text{ sur } [0, +\infty[$$

⑥