

Rappel. $U_n \in K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$.
 $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} U_n \text{ CV} \Leftrightarrow$ la suite $(S_n) \text{ CV}$
 D'un b. car $\underline{\text{CV}}$; $\sum_{n=0}^{\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n U_k$

$\sum_{n \geq 0} U_n$: série de terme général U_n .

$\sum_{n=0}^{\infty} U_n$: somme partielle

$\sum_{n=0}^{\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ dans le cas de CV.

$\sum_{n \geq 0} U_n \text{ CV}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$

$\sum_{n \geq 0} (U_{n+1} - U_n) \text{ CV} \Leftrightarrow$ la suite $(U_n) \text{ CV}$.

$\sum_{n \geq 0} U_n$ st abs CV $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} |U_n| \text{ CV}$
 $\sum_{n \geq 0} U_n$ st abs CV $\Rightarrow \text{CV}$.

$$\sum_{n \geq 0} z^n \text{ CV} \Leftrightarrow |z| < 1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} : \text{ pour } |z| < 1$$

$$\sum_{n=p}^{\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z}.$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \text{ CV}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \forall z \in \mathbb{C}$$

On déduit.

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \right)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\text{et } \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\sum_{n \geq 0} u_n$ CV $\Leftrightarrow$ la suite (S_n) CV.

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

si $u_n \sim v_n$ ($u_n \geq 0$)
 $\sum_{n \geq 0} u_n$ CV $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} v_n$ CV

$u_n \Rightarrow (S_n)$ et
 la suite (S_n)
 est majorée

$\sum_{n \geq 0} u_n$ Converge
 et $u_n \geq 0$

D'Alembert $u_{n+1}, u_n \neq 0$
 si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell < 1$
 $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$ est abs CV $\Rightarrow$ CV.

Th de majoration
 si $0 \leq u_n \leq v_n$
 et $\sum_{n \geq 0} v_n$ CV $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$ CV

$\exists \alpha > 1$ $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$ CV
 $\Rightarrow u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$ CV

si $u_n = o(v_n)$ ($u_n \geq 0$)
 et $\sum_{n \geq 0} v_n$ CV $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$ CV

si $u_n = v_n + w_n$
 et $\sum_{n \geq 0} v_n$ CV et $\sum_{n \geq 0} w_n$ CV
 et $\sum_{n \geq 0} u_n$ CV

$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ div} \Leftrightarrow$ la suite (S_n) div.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ div} \Leftrightarrow \alpha \leq 1$

si $u_n \sim u_n \text{ (} u_n \geq 0 \text{)}$
 $\sum_{n \geq 0} u_n \text{ div} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \cdot \text{div}$

$u_n \rightarrow 0 \Rightarrow (S_n)$ et
 la suite (S_n) et
 non-majorée

$\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge
 et $u_n > 0$

D'Alembert $u_{n+1}, u_n \neq 0$
 si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell > 1$
 $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ div}$

Th de majoration
 si $0 \leq u_n \leq v_n$
 et $\sum_{n \geq 0} v_n \text{ div} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ div}$

$\exists \alpha < 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \exists k > n$
 $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ div}$
 $u_n \geq \frac{1}{n^\alpha} > 0$

Alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge et $u_n > 0$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_k} = \dots$

si $u_n = v_n + w_n$
 et $\sum_{n \geq 0} v_n \text{ cv}$ et $\sum_{n \geq 0} w_n \text{ div}$
 $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ div}$

Exp $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$

Cor: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et alterne $\oplus$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$

Série alternée: $U_n \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \sum_{n \geq 0} U_n$ est alternée diff

$$\begin{cases} U_n = (-1)^n |U_n| \\ U_n = (-1)^{n+1} |U_{n+1}| \end{cases} \Leftrightarrow U_n U_{n+1} \leq 0$$

Exp. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ alternent

$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ avec $x < 0$ est alternée.

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ avec $x < 0$ n'est pas alternée.

T.S.A

Si $\begin{cases} \sum_{n \geq 0} U_n \text{ est alternée} \\ \cdot \text{ la suite } (|U_n|) \text{ est } \searrow \\ \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} |U_n| = 0 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} \sum_{n \geq 0} U_n \subset \mathbb{V} \\ \cdot |R_n| \leq |U_{n+1}|, \forall n \in \mathbb{N} \\ \cdot \text{sig}(\sum_{n=0}^{\infty} U_n) = \text{sig}(U_0) = \text{sig}(1) = 1 \\ \cdot \text{sig}(R_n) = \text{sig}(U_{n+1}) \end{cases}$

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$

Alg
Rep

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1} dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} t^{k-1} dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

$$= \ln 2 - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$$

Utilisation du DL.

$$u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \Rightarrow \text{DL}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{n}$$

$$= -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

$u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ (généralisation)	$u_n = O(\frac{1}{n^2})$ $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$	$\sum \frac{1}{n^2} < \infty$ $\Rightarrow \sum u_n < \infty$
$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^2} < \infty$ $\Rightarrow \sum u_n < \infty$	$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^2} < \infty$ $\Rightarrow \sum u_n < \infty$	$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^2} < \infty$ $\Rightarrow \sum u_n < \infty$

2) $U_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ ^{change de sig} $\Rightarrow DL$

$$\Rightarrow U_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{U_n} + \underbrace{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{W_n}$$

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est alterné et vérifie T.S.A.
 $\Rightarrow \underline{C.V.}$

$W_n = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n}$
et $\sum_{n \geq 1} -\frac{1}{2n}$ div et négatif.

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} W_n$ div

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} U_n$ div

ou bien

$$U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^{3n}}{3n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \subset V.$

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n}$ div.

$\sum_{n \geq 1} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \subset V.$

$\Rightarrow \sum U_n$ div

Ex 1:

Pour calculer la somme d'une série.

on peut utiliser :

- Somme télescopique.

- Somme géométrique.

- utiliser $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

- utiliser les formules de Taylor.

- utiliser une intégrale.

- Décomposition en éléments simples.

- $U_n = \text{Re} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$

Ex 6

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} \bar{e}^{nx} = \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{e}^x)^n \quad C.V. \Leftrightarrow$$

$$0 < \bar{e}^x < 1 \Leftrightarrow \boxed{x > 0}$$

$$x > 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \bar{e}^{nx} = \frac{1}{1 - \bar{e}^x}$$

$$1) U_n = \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n} = F(n)$$

$$\text{avec } F(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 2x}$$
$$= \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+2}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n U_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} U_n \text{ converges to } \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \frac{1}{4}$$

(c) $U_n = \frac{n e^{2n}}{n!} = \frac{n e^2}{n!} + \frac{e^n}{n!}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n e^2}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$$

pp

$$\text{ona. } \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot (k-1)}{(k-1)!} =$$

$$= \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e + e$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} U_n = e + e$$

Ex 2:

3) $U_n = n e^{-2n} Lnn.$

ona. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} e^{-2n} Lnn = 0$

$\Rightarrow U_n = o(\frac{1}{n^2})$

et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty$ et $\oplus \Rightarrow \sum_{n \geq 0} U_n \in CV$

* $U_n = n e^{-\sqrt{n}}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3 e^{-\sqrt{n}}}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 e^{-\sqrt{x}}}{x^3 e^{-\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\sqrt{x}}} = 0$

4) $U_n = \frac{Lnn}{n^{\frac{3}{2}}}$

$\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel } 1 < \alpha < \frac{3}{2}$ (except $\alpha = \frac{3}{2}$)

$n^\alpha U_n = \frac{Lnn}{n^{\frac{3}{2}-\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\Rightarrow U_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$

et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$ et $\oplus$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} U_n \in CV.$

5) $U_n = \frac{ch_n}{ch_{2n}} \sim \frac{e^n}{e^{2n}} = \frac{1}{e^n}$

$$\begin{aligned}
 6) U_n &= \left(\frac{n^2 + 5n + 1}{n^2 + 4n + 1} \right)^{n^2} \\
 &= e^{n^2 \ln \left(\frac{n^2 + 5n + 1}{n^2 + 4n + 1} \right)} \\
 &= e^{n^2 \ln \left(1 + \frac{n}{n^2 + 4n + 1} \right)}
 \end{aligned}$$

$$\text{ona. } \ln \left(1 + \frac{n}{n^2 + 4n + 1} \right) \sim \frac{n}{n^2 + 4n + 1} \sim \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow n^2 \ln \left(1 + \frac{n}{n^2 + 4n + 1} \right) \sim n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$\Rightarrow e^{n^2 \ln \left(1 + \frac{n}{n^2 + 4n + 1} \right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n \geq a} U_n \text{ div}$$

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{U_n} = +\infty$$

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{U_n} = 0$$

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{U_n} = e^l$$

$x \mapsto e^x$ est continue

$$7) U_n = (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \geq 0$$

$$\sum_{n \geq 1} U_n \text{ est alterne}$$

$$|U_n| = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

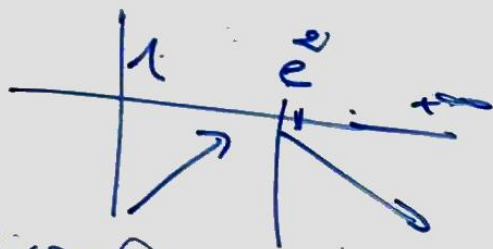
$$\text{rg. } (|U_n|) \text{ est } \searrow$$

$$|U_n| - |U_{n+1}| > 0$$

$$\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} < 1$$

$$|U_n| = f(n) \text{ avec } f \text{ est } \downarrow$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}; x \in [1, +\infty[.$$



f est $\downarrow$ sur $[e^e, +\infty[$.

$\Rightarrow \exists n_0 = E(e^e) + 1 \in \mathbb{N}$

$\& (|U_n|)$ est $\downarrow$
 $n \geq n_0$

T.S.A

$\Rightarrow \sum_{n \geq n_0} U_n$ est C.V. $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} U_n$ C.V.

$$P) U_n = \cos \pi (\sqrt{n^2 + n + 1})$$

$$= \cos \pi n \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

$$= \cos \left[\pi n \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \right]$$

$$= \cos \left[\pi n \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{n} + \frac{3}{8} \frac{1}{n^2} - \frac{3}{16} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right]$$

$$= (-1)^n \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \frac{1}{n} - \frac{3\pi}{16} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

$$= (-1)^n \sin \left(\frac{3\pi}{8n} - \frac{3\pi}{16} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

$$= (-1)^n \left(\frac{3\pi}{8n} - \frac{3\pi}{16} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

$$= (-1)^n \frac{3\pi}{8n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 2: "Série II"

$$U_n = \ln\left(\cos \frac{1}{2^n}\right); n \in \mathbb{N}$$

$$= \ln\left(\underbrace{\cos \frac{1}{2^n}}_{\sim 1} - 1 + 1\right)$$

$$\sim \cos \frac{1}{2^n} - 1$$

$$\sim -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{2n}} = -\frac{1}{4} \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{4n} \text{ CV. } \left(\frac{1}{4} < 1\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} U_n \text{ CV.}$$

$$\text{ona. } \sin \frac{2}{2^n} = 2 \sin \frac{1}{2^n} \cos \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow \ln \sin \frac{1}{2^{n-1}} = \ln 2 + \ln \sin \frac{1}{2^n} + \frac{\ln \cos \frac{1}{2^n}}{U_n}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n U_k = \sum_{k=0}^n \ln \sin \frac{1}{2^{k+1}} - \ln \sin \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^n \ln 2$$

$$= \ln \sin 2 - \ln \sin \frac{1}{2^n} - (n+1) \ln 2$$

$$= \ln \sin 2 - \ln \left(\sin \frac{1}{2^n} \right) 2^{n+1}$$

$$\text{or } \sin \frac{1}{2^n} \sim \frac{1}{2^n} \Rightarrow 2^{n+1} \sin \frac{1}{2^n} \sim 2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n U_k = \ln \left(\frac{\sin 2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} U_k = \ln \left(\frac{\sin 2}{2} \right)$$

$$e) U_n = \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$$

$$= \ln n + a \left(\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) + b \left(\ln n + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \right)$$

$$= (1+a+b) \ln n + a \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + b \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

$$= (1+a+b) \ln n + a \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + b \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

$$= (1+a+b) \ln n + (a+2b) \cdot \frac{1}{n} + \left(-\frac{a}{2} - 2b \right) \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum_{n \geq p} U_n \text{ CV} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a+b=0 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow 1-b=0 \Rightarrow \underline{b=1}$$

con si $1+a+b \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \pm \infty$

Alors $\boxed{1+a+b=0} \text{ (1)}$

si $a+2b \neq 0 \Rightarrow U_n \sim \frac{a+2b}{n} \Rightarrow \sum U_n \text{ div.}$

$\Rightarrow a+2b=0$

$$3) \underline{x \in]-1; 1[}$$

$$\sum_{n \geq 0} nx^n. \text{ CV.}$$

$$\text{soit } U_n(x) = nx^n, x \in]-1; 1[.$$

$$\text{Si } x \neq 0$$

$$\left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \frac{n+1}{n} |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x| < 1.$$

$$\Rightarrow \text{Règle de d'Alembert} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} U_n(x) \text{ CV.}$$

$$\text{Si } x = 0; \quad U_n(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} U_n(0) \text{ CV.}$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

$$S_n \text{ est dérivable sur }]-1; 1[.$$

$$S'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n kx^k = \frac{-(n+1)x^{n+1}(1-x) + x(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0 \quad (|x| < 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0 \quad \text{car } \sum_{n \geq 0} nx^n \text{ CV.}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 0} n z^n$ cv

$$\sum_{n \geq 0} n z^n = ??$$

Réponse La série produit de Cauchy

de $\sum_{n \geq 0} z^n$ par elle même est

$$\sum_{n \geq 0} w_n \text{ avec } w_n = \sum_{k=0}^n z^k \cdot z^{n-k} = (n+1) z^n.$$

Or $\sum_{n \geq 0} z^n$ est abs cv. $|z| < 1$

Alors $\sum_{n \geq 0} w_n$ est abs cv. (et)

$$w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)$$

$$= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n \geq 0} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$$

Rappel

La série produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} u_n$ et

$\sum_{n \geq 0} v_n$ est la série $\sum_{n \geq 0} w_n$

$$\text{avec } w_n = \sum_{k=0}^n u_k \cdot v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p \cdot v_q.$$

Ex: la série produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{y^n}{n!}$

$$\text{est } \sum_{n \geq 0} w_n \text{ avec } w_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Th

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont abs cv, alors la série produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n$ est abs cv.

Dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right).$$

Exercice 8.

$$\begin{cases} 0 < a_0 < 1 \\ a_{n+1} = a_n - a_n^2 \end{cases}$$

$$1) \forall n \in \mathbb{N}; 0 < a_n < 1 \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ CV}$$

$$l = l - l^2 \Rightarrow l = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$e) a) \text{ on a } a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$$

$$\Rightarrow (\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)) = \ln(1 - a_n)$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = -\infty$$

$$\text{la suite } (\ln(a_n)) \text{ div}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) \text{ div}$$

$$\sum_{n \geq 0} \ln(1 - a_n) \text{ div}$$

$$\text{De plus } \ln(1 - a_n) \sim -a_n \text{ negative}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} (-a_n) \text{ div. } \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} a_n \text{ div.}$$

$$b) \sum_{n \geq 0} a_n^2 = \sum_{n \geq 0} a_n - a_{n+1} \text{ CV}$$

$$\text{car la suite } (a_n) \text{ CV.}$$

$$3) \forall k \in \mathbb{N}; a_n < \frac{1}{n+1}$$

$$1 - a_n^2 \leq 1$$

$$(1 + a_n)(1 - a_n) \leq 1$$

$$\frac{1 + a_n}{a_n} \leq \frac{1}{(1 - a_n) a_n}$$

$$\frac{1}{a_n} + 1 \leq \frac{1}{a_{n+1}}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \geq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) \geq n$$

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} \geq n$$

$$\frac{1}{a_n} \geq n + \frac{1}{a_0} \geq n+1$$

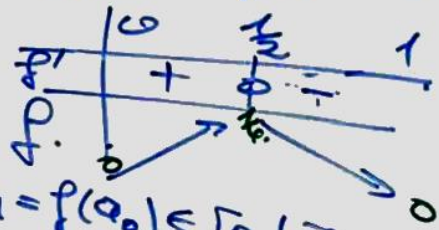
$$\Rightarrow a_n \leq \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Autrement

Par récurrence :

Pour $n=0$; $a_0 < 1$ vrai.

ona. $a_{n+1} = f(a_n)$ avec $f(x) = x - x^2$.



Pour $n=1$; $a_1 = f(a_0) \in [0, 1/2]$
 $\Rightarrow a_1 < 1/2$ vérifié
soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $a_n < \frac{1}{n+1}$ et mg.

$$a_{n+1} < \frac{1}{n+2}$$

ona. $a_n < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}$.

et $f \nearrow$ sur $[0, 1/2] \Rightarrow f(a_n) < f(\frac{1}{n+1}) = \frac{n}{(n+1)^2}$
 $\sqrt{\frac{n}{n^2+2n}} = \frac{1}{n+2}$

b) soit $U_n = n a_n$.

ona. $n a_n < \frac{n}{n+1} < 1$

$\Rightarrow$ la suite (U_n) est maj

$$U_{n+1} - U_n = (n+1)a_{n+1} - n a_n \\ = (n+1)a_n(1-a_n) - n a_n$$

$$= a_n((n+1)(1-a_n) - n)$$

$$= a_n(-n a_n + 1 - a_n)$$

$$= a_n(1 - (n+1)a_n) \geq 0$$

$\Rightarrow (U_n)$ est croissante

Ainsi (U_n) CV. on pose $l = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$

u) Soit $V_n = l - na_n = l - U_n$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} -V_n$ CV car la suite $(V_n) \subset V$.

b) $n(V_{n+1} - V_n) = n.(U_n - U_{n+1})$
 $= na_n((n+1)a_n - 1)$
 $= na_n(na_n + a_n - 1)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n(V_{n+1} - V_n) = l(l-1)$

c) Supp $l(l-1) \neq 0$
 $\Rightarrow n(V_{n+1} - V_n) \sim l(l-1)$
 $\Rightarrow V_{n+1} - V_n \sim \frac{l(l-1)}{n}$

or $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(l-1)}{n}$ diverge et b diverge
 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} V_{n+1} - V_n$ diverge.

Alors $l(l-1) = 0 \Leftrightarrow l = 0$ ou $l = 1$

Si $l = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} na_n \Rightarrow na_n \rightarrow 0$, then
 et $(na_n) \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$ L'imp
 $\Rightarrow \underline{l = 1}$.

Exercice 11:

3) $S_n = (n + \frac{1}{2}) \ln n - n - \ln n!$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} - S_n \sim \frac{1}{2n^2}$

$S_{n+1} - S_n = (n + \frac{3}{2}) \ln(n+1) - n - 1 - \ln(n+1)!$
 $= (n + \frac{1}{2}) \ln n + 1 + \ln n!$

$= (n + \frac{1}{2}) \ln \frac{n+1}{n} + \ln(n!) - \ln \frac{(n+1)!}{n!} - 1$
 $= (n + \frac{1}{2}) (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \dots) - 1$

$= (n + \frac{1}{2}) (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \dots) - 1$

$$= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{12} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{12} \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow S_{n+1} - S_n \sim \frac{1}{12} \frac{1}{n^2}$$

b) on a $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{12n^2}$ C.V. (*) et $\oplus$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} S_{n+1} - S_n \text{ C.V.}$$

$$\Rightarrow \text{la suite } (S_n) \text{ C.V.}$$

on pose $L = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

c) on a $S_n = L_n \cdot \left(\frac{n^{n+1} e^{-n}}{n!} \right)$

$$\Rightarrow e^{S_n} = \frac{n^{n+1} e^{-n}}{n!} \sim e^2 \quad \text{X } \odot$$

$$\Rightarrow n^n e^n \sqrt{n} \sim e^n n! \quad (*)$$

4 a) D'après (*)

$$(2n)^{2n} e^{2n} \sqrt{2n} \sim e^{2n} (2n)! \quad a$$

$$\text{et } n^{2n} e^{2n} n \sim e^{2n} (n!)^2 \quad b$$

$$\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{e^{2n} (2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{e^{2n} \sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$$

d'après e.c.

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{e^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$$

$$\Rightarrow e^{2n} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \sim \frac{e^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$$

$$\Rightarrow e^{2n} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

$$\Rightarrow 2 = -\frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln \pi$$

$$4) R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k v_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N u_k v_k$$

D'après 4. $\sum_{k=n+1}^N u_k v_k = v_N S_N + \sum_{k=n+1}^{N-1} (v_k - v_{k+1}) S_k$

$$= \sum_{k=p}^{n-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_n v_n - S_{p+1} v_p$$

on pose $S_{-1} = 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k v_k = \sum_{k=0}^n S_k (v_k - v_{k+1}) + S_n v_n$$

ora (S_n) est bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n v_n = 0$

$$\left| \sum_{k=p}^n S_k (v_k - v_{k+1}) \right| \leq \sum_{k=p}^n |S_k| |v_k - v_{k+1}| \leq M \sum_{k=p}^n |v_k - v_{k+1}|$$

1) On a $\sum_{k=p}^n u_k v_k = v_n S_n + \sum_{k=p}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) S_k - v_p S_{p-1}$

on a $\sum_{k=p}^n u_k v_k = \sum_{k=p}^n (S_k - S_{k-1}) v_k$

$$= \sum_{k=p}^n S_k v_k - \sum_{k=p}^n S_{k-1} v_k$$

$$= \sum_{k=p}^n S_k v_k - \sum_{k=p-1}^{n-1} S_k v_{k+1}$$

or la suite (u_n) CV $\Rightarrow \sum_{k \geq 0} u_k - u_{k+1}$ CV

$\Rightarrow \sum_{k \geq 0} S_k (u_k - u_{k+1})$ est abs CV.

D'où la suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k u_k \right)$ CV.

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \cdot u_n$ CV

3) $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{i n \alpha}}{n^d}$

$d \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soit $u_n = \frac{1}{n^d}$ et $U_n = e^{i n \alpha}$.

$\alpha > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ et (u_n) est $\downarrow$

$\cdot S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (e^{i \alpha})^k$

$= \frac{1 - e^{i(n+1)\alpha}}{1 - e^{i\alpha}}$

~~Si $d \neq 1$~~

$|S_n| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\alpha}|} = \Pi, \forall n \in \mathbb{N}$

D'après 1 et 2) $\sum_{n \geq 0} u_n \cdot u_n$ est CV.

$\sum_{n \geq 0} \frac{e^{i n \alpha}}{n^d}$

$\rightarrow \alpha \neq 0 \in 2\pi \mathbb{Z}$

$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{i n \alpha}}{n^d} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^d}$ CV pour

$1 < d$ et div pour $0 < \alpha \leq 1$

~~Si $d \leq 0$~~

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{i n \alpha}}{n^d}$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{e^{i n \alpha}}{n^d}$ div

$$4) R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k V_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N U_k V_k$$

D'après 4. $\sum_{k=n+1}^N U_k V_k = \underbrace{U_N}_{U_0} S_N + \sum_{k=n+1}^{N-1} (U_k - U_{k+1}) S_k - U_{n+1} S_n.$

$N \rightarrow \infty$, on obtient :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (U_k - U_{k+1}) S_k - U_{n+1} S_n.$$

$$\Rightarrow |R_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |U_k - U_{k+1}| |S_k| + |U_{n+1} S_n|.$$

← car $\sum$ est abs conv.

$$\leq \pi \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} U_k - U_{k+1} + U_{n+1} \right)$$

$$\leq \pi U_{n+1}.$$

Exercice 6

i) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann.
 $\Rightarrow$ CV $\Leftrightarrow$ $x > 1$.

Rq $\Rightarrow$ Soit $\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.
 $D_{\xi} =]1, \infty[$.

e) Soit $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \right)$.
 Rq F est définie sur $]1, \infty[$.
Dep on a $\forall x > -1, \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{x}{n} > 0$.
 $x + \frac{x^2}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ existe sur $]1, \infty[$.

De plus : $\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
 $\Rightarrow x - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
 $= O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$D_a = \{x > 0; \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^x} \text{ est abs CV}\}$
 et a) soit $\sigma \in D_a, n \in [0, \infty[\subset D_a$.

$\Downarrow$
 $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^{\sigma}}$ est abs CV

soit $x \geq \sigma \Rightarrow n \geq 1, n^x \geq n^{\sigma}$.

$\Rightarrow 0 \leq \frac{|a_n|}{n^x} \leq \frac{|a_n|}{n^{\sigma}}$

or $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^{\sigma}}$ est CV $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^x}$ est CV
 $\Rightarrow x \in D_a \Rightarrow [0, \infty[\subset D_a$

b) Si $D_a \neq \emptyset \Rightarrow \exists \sigma \in D_a$.

$$\Rightarrow \sum_{k \geq 1} \sigma^k \subset D_a$$

$\Rightarrow D_a$ non majné.

* Ng. D_a est intervalle.

soit $x, y \in D_a$ ($x \leq y$) Ng. $[x, y] \subset D_a$

ona. $x \in D_a \Rightarrow [x, \infty) \subset D_a \Rightarrow [x, y] \subset D_a$.

$\Rightarrow D_a$ est un intervalle.

3) $a D_a = ??$ pour $a_n = \frac{1}{n^a}$.

$$D_a = \left\{ x > 0 \mid \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{k+a}} \text{ abscv} \right\}$$

et

$$\Downarrow x+a > 1 \Leftrightarrow x > 1-a$$

$$\Rightarrow D_a =]\beta, \infty[\text{ avec } \beta = \max(0, 1-a)$$

$$b) a_n = n!$$

$$D_a = \{ x > 0 \mid \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^x} \text{ abscv} \}$$

$$\text{soit } U_n(x) = \frac{n!}{n^x}$$

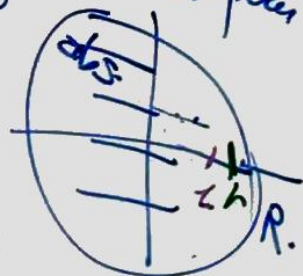
$$\left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \frac{n+1}{(n+1)^x} n^x$$

$$= n+1 \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^x \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

$$\Rightarrow \forall x > 0; \sum_{n \geq 1} U_n(x) \text{ div. } \forall x > 0$$

$$\Rightarrow D_a = \emptyset$$

$$4) \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ abscv pour } |z| < R$$



$$4) R > 1 \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} \text{ s.t. } 1 < r < R$$

$$\text{Puisque } r < R \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n r^n \text{ est abscv}$$

$$b) \text{ Soit } x > 0$$

$$\text{ona. } \frac{1}{n^x} = o(n^n) \text{ car } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{n^x r^n}{n^n}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{n^x} = o(a_n r^n)$$

$$\text{Puisque } \sum_{n \geq 0} a_n n^n \text{ est abscv} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n^x} \text{ est abscv}$$

$$\Rightarrow D_a =]0, \infty[$$

$$5) R < 1. \text{ et } \exists R < r < 1 \text{ s.t. } a_n n^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$a) \text{ Soit } U_n = n^x \cdot n^n$$

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \left(\frac{n+1}{n} \right)^x \cdot n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} n^x$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \Rightarrow n^n = o\left(\frac{1}{n^x}\right)$$

$$\Rightarrow a_n r^n = o\left(\frac{a_n}{n^x}\right)$$

$$\text{ona } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n r^n \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^x} \neq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \left| \frac{a_n}{n^x} \right| \text{ div; } \forall x > 0$$

$$\Rightarrow D_a = \emptyset$$

Rappel.

$A \neq \emptyset$ et minoré

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geq m. \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A. \end{cases}$$



$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A. m \leq x < m + \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geq m. \\ \text{et} \\ \forall b > m, \exists x \in A. m \leq x < b. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geq m. \\ \text{et} \\ \exists x \in A. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = m. \end{cases}$$

$$\text{c) } d) \sup A = \inf L_A \\ \Rightarrow \exists b \in D_A. \sup A \leq b < \alpha.$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^b} \text{ est abs cv.}$$

$$L_{nn} \cdot \frac{a_n}{n^d} = L_{nn} \frac{n^b}{n^d} \cdot \frac{a_n}{n^b}$$

$$= \left(\frac{L_{nn}}{n^{d-b}} \right) \cdot \frac{a_n}{n^b}$$

$$= o\left(\frac{a_n}{n^b}\right)$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^b} \text{ est abs cv} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{L_{nn} \cdot a_n}{n^d} \text{ est abs cv}$$