

On en déduit

9.2 Séries numériques

9.2.1 Définition

Définition

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique. On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ avec

$$S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$$

Cette série est notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ou $\sum u_n$.

Le terme S_n est appelé somme partielle de rang n de cette série.

Remarque Une série est un cas particulier de suite, c'est une suite de sommes partielles.

Exemple La série $\sum_{n \geq 0} n$ est la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ est la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (\text{si } q \neq 1)$$

Exemple La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (\text{avec } n \geq 1)$$

9.2. SÉRIES NUMÉRIQUES

Exemple Soit (v_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

Posons $u_0 = v_0$ et $u_n = v_n - v_{n-1}$.

La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est la suite des sommes partielles

$$\sum_{k=0}^n u_k = v_n$$

Ainsi, la suite (v_n) se confond avec la série $\sum u_n$.

On suppose désormais les séries étudiées définies à partir du rang $n_0 = 0$.
On peut s'y ramener quitte à poser les premiers termes de la série comme étant nuls si non définis.

9.2.2 Convergence d'une série numérique

9.2.2.1 Nature d'une série numérique

Définition

On dit que qu'une série $\sum u_n$ converge si la suite de ses sommes partielles converge.
On peut alors introduire la somme de la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$$

Attention : Par essence, une somme de série numérique est une limite, pour la manipuler, il est indispensable de justifier a priori son existence, i.e. que la série soit convergente.

Exemple Etudions $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$

Pour $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

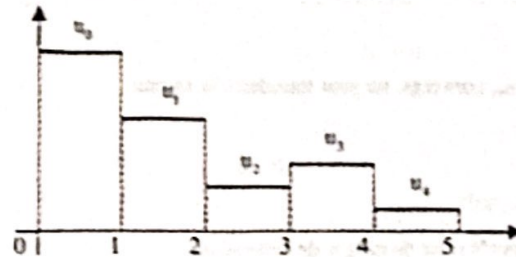
Exemple Etudions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

Pour $n \geq 1$, la fonction $t \mapsto 1/t$ étant décroissante, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) \rightarrow +\infty$$

Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Remarque $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la somme des aires hachurées converge.



Exemple Étudions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Pour $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1} dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt$$

Or

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2 \text{ et } 0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$$

Ainsi $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

9.2.2.2 Reste d'une série convergente

Théorème

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On a équivalence entre :

(i) $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge ;

(ii) $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

dém. :

Les sommes partielles de deux séries diffèrent d'une constante et donc l'une converge si, et seulement si, l'autre aussi.

□

Corollaire

On ne modifie pas la nature d'une série en en modifiant la valeur d'un nombre fini de termes. En revanche, cela modifie évidemment la valeur de la somme...

Définition

Si la série $\sum u_n$ converge, on peut introduire la somme

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Ce terme est appelé reste de rang n de cette série.

Attention : On ne peut introduire le reste d'une série qu'après avoir justifié sa convergence.

Théorème

Si $\sum u_n$ converge alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

De plus

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

dém. :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Pour $N \geq n$,

$$\sum_{k=0}^N u_k = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^N u_k$$

Quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

égalité qu'on écrit souvent $S = S_n + R_n$.

De plus, on a alors

$$R_n = S - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

□

9.2.3 Limite du terme d'une série convergente

Théorème

Si la série $\sum u_n$ converge alors $u_n \rightarrow 0$.

dém. :

Posons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Si (S_n) converge en posant S sa limite

$$u_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0$$

□

Définition

Si (u_n) ne tend pas vers 0 alors on dit que la série de terme général u_n **diverge grossièrement** (DVG).

Exemple La série $\sum \cos(n)$ diverge grossièrement.

En effet, si $\cos(n) \rightarrow 0$ alors la relation $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$ donne à la limite l'absurdité $0 = -1$.

Exemple La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, mais pas grossièrement.

Remarque Si $\sum u_n$ converge, alors

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = S_{2n} - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On peut alors retrouver la divergence de $\sum 1/n$ en exploitant

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

9.2.4 Opérations sur les séries convergentes

9.2.4.1 Linéarité

Théorème

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les séries $\sum \lambda u_n$ et $\sum u_n + v_n$ convergent et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

9.2. SÉRIES NUMÉRIQUES

dém. :

Par opérations sur les limites.

□

Corollaire

L'ensemble constitué des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n$ converge est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. L'application $u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ y définit une forme linéaire.

Exemple Si $\sum u_n$ et $\sum (u_n + v_n)$ convergent alors $\sum v_n$ converge.

En effet, on peut écrire

$$v_n = (u_n + v_n) + (-1) \cdot u_n$$

Attention : Pour écrire

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

il faut vérifier la convergence d'au moins deux des séries engagées.

Exemple Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

Attention : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien conclure sur la nature de $\sum (u_n + v_n)$.

9.2.4.2 Positivité

Théorème

Soit (u_n) une suite réelle.

Si $\sum u_n$ converge et si tous les termes de la suite sont positifs alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geq 0$$

dém. :

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^N u_n \geq 0$$

donc à la limite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geq 0$$

□

Corollaire

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

dém. :

On a, avec convergences,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (v_n - u_n) \geq 0$$

□

Théorème

Soit (u_n) une suite réelle.

Si $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\sum u_n$ converge et si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$$

dém. :

La suite (S_n) des sommes partielles est croissante car

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$$

Or celle-ci est aussi positive et tend vers 0 donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 0$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$$

□

9.2.4.3 Conjugaison

Théorème

Soit (z_n) une suite complexe.

Si $\sum z_n$ converge alors $\sum \bar{z}_n$ aussi et

$$\overline{\sum_{k=0}^{+\infty} z_k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \bar{z}_k$$

9.3. CONVERGENCE PAR COMPARAISON À UNE SÉRIE POSITIVE

dém. :

Par conjugaison de limites.

□

Corollaire

On a équivalence entre :

(i) $\sum z_n$ converge :

(ii) $\sum \operatorname{Re}(z_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(z_n)$ convergent.

De plus, on a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(z_k) + i \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(z_k)$$

dém. :

(i) $\Rightarrow$ (ii) car $\operatorname{Re}(z_n) = \frac{1}{2}(z_n + \bar{z}_n)$ et $\operatorname{Im}(z_n) = \frac{1}{2i}(z_n - \bar{z}_n)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) car $z_n = \operatorname{Re}(z_n) + i\operatorname{Im}(z_n)$.

□

9.3 Convergence par comparaison à une série positive

9.3.1 Cas des séries à termes réels positifs

Définition

Une série à termes positifs est une série dont le terme général est élément de $\mathbb{R}^+$.

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On a équivalence entre :

(i) $\sum u_n$ converge :

(ii) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq M$.

dém. :

La suite (S_n) des sommes partielles est croissante car $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$. Ainsi, cette suite converge si, et seulement si, elle est majorée.

□

Remarque Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs divergente alors $\sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

9.3.2 Comparaison de séries à termes positifs

Théorème

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

a) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ aussi.

b) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ aussi.

dém. :

a) $\sum u_n$ converge car c'est une série à termes positifs aux sommes partielles majorées car

$$\sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k = M$$

b) C'est la contraposée de a).

□

Remarque Le résultat demeure même si la comparaison ne vaut qu'à partir d'un certain rang.

Exemple Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

Pour $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

or $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge donc, par comparaison de série à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2}$ converge,

puis la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Exemple Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n+1}$

On a $n \frac{\ln n}{n+1} \sim \ln n \rightarrow +\infty$ donc pour n assez grand,

$$\frac{\ln n}{n+1} \geq \frac{1}{n}$$

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc, par comparaison de série à termes positifs, la série $\sum \frac{\ln n}{n+1}$ diverge.

Plus précisément, on peut même affirmer

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

car la suite des sommes partielles est croissante puisque ses termes sont positifs.

9.3. CONVERGENCE PAR COMPARAISON À UNE SÉRIE POSITIVE

Théorème

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

Si $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

dém. :

A partir d'un certain rang n_0 , on peut écrire

$$1/2v_n \leq u_n \leq 2v_n$$

Quitte à modifier les premiers termes des séries, on peut supposer l'encadrement vrai pour tout rang n . Par cet encadrement, la convergence d'une série entraîne la convergence de l'autre.

□

Exemple Déterminons la nature de $\sum \frac{1}{n^2 + n}$

On a

$$\frac{1}{n^2 + n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Or $\sum 1/n^2$ converge et $1/n^2 \geq 0$ donc $\sum 1/(n^2 + n)$ converge.

Exemple Déterminons la nature de $\sum \frac{1}{n + \sqrt{n}}$

On a

$$\frac{1}{n + \sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Or $\sum 1/n$ diverge et $1/n \geq 0$ donc $\sum 1/(n + \sqrt{n})$ diverge.

Remarque Pour employer le résultat qui précède, il suffit seulement de vérifier la positivité de v_n . l'autre sera vraie (au moins à partir d'un certain rang) en vertu de l'équivalent.

Remarque Via passage à l'opposé, le résultat est aussi vrai pour les séries à termes négatifs.

Attention : La conservation de la nature d'une série par équivalence des termes n'est vraie que pour les séries à termes de signe constant.

9.3.3 Convergence absolue.

Définition

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

Exemple La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge absolument (CVA)

En effet, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Théorème

Si $\sum u_n$ converge absolument alors celle-ci converge et

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

dém. :

Cas (u_n) est une suite réelle à termes positifs : il n'y a rien à démontrer.

Cas (u_n) est une suite réelle. On introduit u_n^+ et u_n^- définis par

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0)$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_n^+ - u_n^- \text{ et } |u_n| = u_n^+ + u_n^-$$

Puisque $0 \leq u_n^+, u_n^- \leq |u_n|$, on peut affirmer, par comparaison de séries à termes positifs, la convergence des séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ puis celle de $\sum u_n$ par différence de deux séries convergentes.

Cas (u_n) est une suite complexe. On introduit $\operatorname{Re}(u_n)$ et $\operatorname{Im}(u_n)$.

On a $|\operatorname{Re}(u_n)|, |\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|$ donc les séries réelles $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent puis la série complexe $\sum u_n$ converge aussi.

□

Bilan : Pour une série réelle ou complexe :

$$\text{CVA} \Rightarrow \text{CV}$$

Pour une série à termes positifs :

$$\text{CVA} \Leftrightarrow \text{CV}$$

Remarque Plus généralement, pour une série à termes de signe constant à partir d'un certain rang, il y a aussi équivalence.

Attention : Il se peut que la série $\sum u_n$ converge alors que $\sum |u_n|$ diverge.

Définition

Une série convergente, mais non absolument convergente, est dite semi-convergente.

Exemple La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est semi-convergente.

9.3.4 Convergence par comparaison à une série positive

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à termes positifs.
 Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge absolument (et donc converge).

dém. :

Il existe $M \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geq N, |u_n| \leq M v_n$$

Quitte à modifier les premiers termes des séries (ce qui ne change pas la nature de celle-ci), on peut supposer la majoration vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $\sum M v_n$ converge et $M v_n \geq 0$ donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge.

□

Corollaire

Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge avec $v_n \geq 0$ alors $\sum u_n$ converge absolument et donc converge

Attention : Ces énoncés sont faux sans l'hypothèse $v_n \geq 0$.

Il est essentiel de comparer à une série à termes positifs !

Exemple Déterminons la nature de la série $\sum \frac{\sin n}{n^2}$.

On a

$$\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

donc

$$\frac{\sin n}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\frac{1}{n^2} \geq 0$ donc, par domination, $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ converge absolument et donc converge.

9.3.5 Séries et règles de référence

9.3.5.1 Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème

La série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

dém. :

Cas $\alpha \leq 1$ Puisque pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on obtient par comparaison de séries à termes positifs que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Cas $\alpha > 1$

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série à terme positif. Nous allons montrer qu'elle converge en observant que ses sommes partielles sont majorées. Puisque la fonction $x \mapsto 1/x^\alpha$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, on a pour tout $k \geq 2$

$$\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}$$

et alors

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{-1}{\alpha-1} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_1^n = \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)$$

puis

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} = M$$

Par conséquent la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge car c'est une série à termes positifs aux sommes partielles majorées.

□

Exemple $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2+1}$ convergent alors que $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent.

Remarque Puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs, il est possible de comparer à $\sum 1/n^\alpha$ pour étudier la nature d'une série numérique.

9.3.5.2 Règles de Riemann

Exemple Nature de $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2 - n + 1}$

On a $\frac{(-1)^n}{n^2 - n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ mais ce n'est pas décisif.

Cependant

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2 - n + 1} \right| \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\frac{1}{n^2} \geq 0$ donc $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2 - n + 1}$ converge.

Exemple Nature de $\sum_{n \geq 1} \left(\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right)$

9.3. CONVERGENCE PAR COMPARAISON À UNE SÉRIE POSITIVE

On sait

$$\tan u \underset{u \rightarrow 0}{=} u + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3)$$

et donc

$$\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n^3}$$

or $\sum \frac{1}{3n^3}$ converge et $\frac{1}{3n^3} \geq 0$ donc $\sum \tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$ converge.

Exemple Nature de $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n^2+1}$

On a

$$\frac{n+1}{n^2+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\frac{1}{n} \geq 0$ donc $\sum \frac{n+1}{n^2+1}$ diverge.

Exemple Nature de $\sum_{n \geq 0} e^{-n}$

On a

$$n^2 e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc

$$e^{-n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\frac{1}{n^2} \geq 0$ donc $\sum e^{-n}$ converge absolument et donc converge.

Exemple Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2+1}$

On a

$$n^{3/2} \frac{\ln(n)}{n^2+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

donc

$$\frac{\ln(n)}{n^2+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Or $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge et $\frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$ donc $\sum \frac{\ln(n)}{n^2+1}$ converge absolument puis converge.

Exemple Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\ln(n)}$

On a

$$n \times \frac{1}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc pour n assez grand,

$$n \times \frac{1}{\ln n} \geq 1$$

puis

$$\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$$

Puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\frac{1}{n} \geq 0$ la série $\sum \frac{1}{\ln n}$ diverge.

Exemple Nature de $\sum \frac{1}{d_n^2}$

avec d_n le nombre de diviseurs positifs de n .

Pour p nombre premier $d_p = 2$.

Puisqu'il y a une infinité de nombres premiers, $(1/d_n^2)$ ne tend pas vers 0 et donc la série diverge grossièrement.

Bilan : Les idées récurrentes :

- Si (u_n) ne tend pas vers 0 alors $\sum u_n$ diverge grossièrement ;
- Si $u_n \sim C/n^\alpha$ (avec $C \neq 0$) alors

$\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$;

- Si on détermine $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow 0$ alors $u_n = o(1/n^\alpha)$ et donc $\sum u_n$ converge absolument ;
- Si $nu_n \rightarrow \ell \neq 0$ alors $\sum u_n$ diverge.

9.3.5.3 Séries géométriques

Théorème

Soit $q \in \mathbb{C}$.

Si $|q| \geq 1$ alors $\sum q^n$ diverge grossièrement.

Si $|q| < 1$ alors $\sum q^n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

dém. :

Cas $|q| \geq 1$:

On a $|q^n| = |q|^n \geq 1$ donc la suite (q^n) ne tend pas vers 0. Il y a divergence grossière.

Cas $|q| < 1$:

$$\sum_{k=0}^n |q|^k = \frac{1 - |q|^{n+1}}{1 - |q|} \rightarrow \frac{1}{1 - |q|}$$

9.3. CONVERGENCE PAR COMPARAISON À UNE SÉRIE POSITIVE

donc $\sum q^n$ converge absolument.
De plus

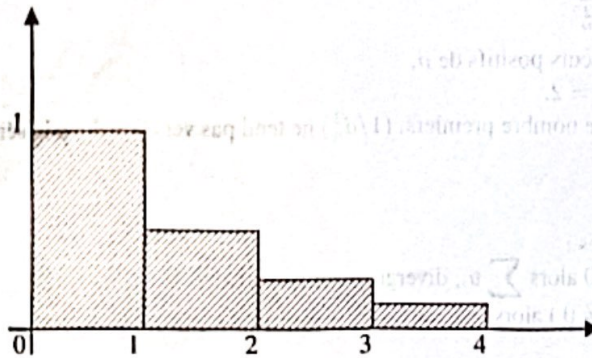
$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow \frac{1}{1 - q}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

□

Exemple $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2.$



Exemple Pour $|x| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Exemple Pour $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1 + z}$$

9.3.5.4 Règle de d'Alembert

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série à termes non nuls.

On suppose

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

Si $\ell = 1$ alors on ne peut rien conclure.

dém. :

Cas $\ell > 1$:

A partir d'un certain rang n_0

$$|u_{n+1}/u_n| \geq 1$$

et donc la suite $(|u_n|)_{n \geq n_0}$ est croissante. Elle ne peut alors converger vers 0 que si elle est constante égale à 0 ce qui est exclu.

Cas $\ell < 1$:

Soit $\varepsilon > 0$ (qu'on fixera par la suite). A partir d'un certain rang n_0 ,

$$||u_{n+1}/u_n| - \ell| \leq \varepsilon$$

et donc

$$|u_{n+1}/u_n| \leq \ell + \varepsilon$$

Par récurrence

$$|u_n| \leq (\ell + \varepsilon)^{n-n_0} |u_{n_0}| = M(\ell + \varepsilon)^n$$

avec $M = (\ell + \varepsilon)^{-n_0} |u_{n_0}|$. En choisissant initialement $\varepsilon > 0$ pour que $q = \ell + \varepsilon \in [0, 1[$, on a

$$u_n = O(q^n) \text{ avec } q^n \geq 0 \text{ et } \sum q^n \text{ converge}$$

On en déduit que $\sum u_n$ converge absolument et donc converge.

Cas $\ell = 1$:

Considérons $u_n = 1/n^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

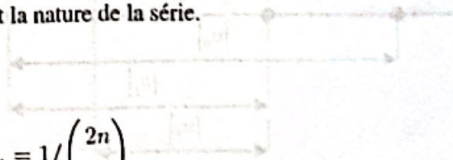
On a

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow 1$$

alors que $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

□

Remarque C'est un critère grossier réservé aux suites dont le terme général comporte un produit (terme géométrique, factoriel, ...) induisant la nature de la série.



Exemple Nature de $\sum_{n \geq 0} u_n$ avec $u_n = 1/\binom{2n}{n}$

On a $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} > 0$ et

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow \frac{1}{4} < 1$$

donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument puis converge.

D'une part, la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge en vertu du critère spécial.

D'autre part, les séries $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ convergent absolument.

Par somme, on peut conclure la convergence de la série étudiée

Exemple Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$

On écrit

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

La série alternée $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ converge en vertu du critère spécial.

Mais

$$\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n} \geq 0 \text{ et } \sum \frac{1}{2n} \text{ diverge}$$

donc par comparaison à une série à termes positifs, $\sum \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

Finalement, par somme, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge.

Remarque Ici

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

alors que

$$\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right) \text{ diverge et } \sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \text{ converge}$$

Cet exemple illustre que la conservation de la nature d'une série par équivalence des termes est incorrecte si la série n'est pas de signe constant.

Exercice Transformation d'Abel

Exemple Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n}$

On introduit $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k)$ de sorte que $\sin(n) = S_n - S_{n-1}$

$$\sum_{n=1}^N \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{S_{n-1}}{n}$$

Par translation d'indice,

$$\sum_{n=1}^N \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{S_n}{n+1}$$

9.4 Autres méthodes d'obtention de convergence

9.4.1 Séries alternées

Définition

Une suite réelle (u_n) est dite alternée si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n| \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$$

Une série réelle $\sum u_n$ est dite alternée si la suite (u_n) l'est.

Exemple Les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right)$ sont alternées.

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série alternée.

Si la suite $(|u_n|)_{n \geq 0}$ décroît vers 0 alors la série $\sum u_n$ est convergente.

De plus, son reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ vérifie :

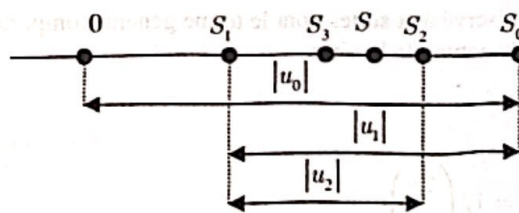
- R_n est du signe de u_{n+1} ;
- $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

dém. :

Quitte à considérer $(-u_n)$, on peut supposer

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n|$$

Posons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.



Nous allons établir l'adjacence des suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) .

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0$$

Ainsi (S_{2n}) est décroissante.

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geq 0$$

Ainsi (S_{2n+1}) est croissante.

Enfin

$$S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \rightarrow 0$$

donc les deux suites sont adjacentes.

Par conséquent, elles convergent vers une même limite S .

Ainsi $\sum u_n$ converge et sa somme S est encadrée par les sommes partielles consécutives.

Considérons maintenant le reste

$$R_n = S - S_n$$

$R_{2n} = S - S_{2n}$. Or $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ donc $R_{2n} \in [u_{2n+1}, 0]$.

$R_{2n+1} = S - S_{2n+1}$. Or $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$ donc $R_{2n+1} \in [0, u_{2n+2}]$

□

Corollaire

Le signe de la somme est celui de son premier terme.

dém. :

La somme S de la série est encadrée par $S_0 = u_0$ et $S_1 = u_0 + u_1$. Or $|u_1| \leq |u_0|$ donc $u_0 + u_1$ est du signe de u_0 et donc S aussi.

□

Exemple Déterminons la nature de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

C'est une série alternée.

$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ décroît vers 0 donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ converge.

Exemple Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1}$

1ère méthode :

C'est une série alternée et $\left| \frac{(-1)^n}{n^3 + 1} \right| = \frac{1}{n^3 + 1}$ décroît vers 0 donc $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1}$ converge.

2ème méthode :

$\frac{(-1)^n}{n^3 + 1} = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^3}$ converge avec $\frac{1}{n^3} \geq 0$ donc $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1}$ converge absolument.

9.4.2 Exploitation d'un DA à deux termes

Exemple Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n-1}}$

La série est alternée, mais son terme ne décroît pas en valeur absolue :

$$\begin{array}{c|ccccc} n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline |u_n| & 1/2 & 1 & 1/4 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

Pour déterminer sa nature, on forme un développement asymptotique à deux termes

$$\frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n-1}} = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

dém. :

Cas $\ell > 1$:

A partir d'un certain rang n_0

$$|u_{n+1}/u_n| \geq 1$$

et donc la suite $(|u_n|)_{n \geq n_0}$ est croissante. Elle ne peut alors converger vers 0 que si elle est constante égale à 0 ce qui est exclu.

Cas $\ell < 1$:

Soit $\varepsilon > 0$ (qu'on fixera par la suite). A partir d'un certain rang n_0 ,

$$||u_{n+1}/u_n| - \ell| \leq \varepsilon$$

et donc

$$|u_{n+1}/u_n| \leq \ell + \varepsilon$$

Par récurrence

$$|u_n| \leq (\ell + \varepsilon)^{n-n_0} |u_{n_0}| = M(\ell + \varepsilon)^n$$

avec $M = (\ell + \varepsilon)^{-n_0} |u_{n_0}|$. En choisissant initialement $\varepsilon > 0$ pour que $q = \ell + \varepsilon \in [0, 1[$, on a

$$u_n = O(q^n) \text{ avec } q^n \geq 0 \text{ et } \sum q^n \text{ converge}$$

On en déduit que $\sum u_n$ converge absolument et donc converge.

Cas $\ell = 1$:

Considérons $u_n = 1/n^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow 1$$

alors que $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

□

Remarque C'est un critère grossier réservé aux suites dont le terme général comporte un produit (terme géométrique, factoriel, ...) induisant la nature de la série.

Exemple Nature de $\sum_{n \geq 0} u_n$ avec $u_n = 1/\binom{2n}{n}$

On a $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} > 0$ et

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow \frac{1}{4} < 1$$

donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument puis converge.

puis

$$\sum_{n=1}^N \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n(n+1)} = S_N + \frac{S_{N+1}}{N+1}$$

Montrons que (S_n) est bornée.

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n e^{ik} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i(n+1)} - 1}{e^i - 1} \right)$$

donc

$$|S_n| \leq \left| \frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^i|}$$

Puisque (S_n) est bornée, $\frac{S_{n+1}}{n+1} \rightarrow 0$ et $\frac{S_n}{n(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum \frac{S_n}{n(n+1)}$ converge absolument et sa somme partielle $\sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n(n+1)}$ converge quand $n \rightarrow +\infty$.

Par opération, on en déduit que la suite de terme général $\sum_{n=1}^N \frac{\sin n}{n}$ converge quand $n \rightarrow +\infty$ et donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ converge.

On peut aussi montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$$

mais c'est une autre histoire...

9.5 Applications

9.5.1 Lien suite-série

Théorème

La suite (u_n) et la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

dém. :

On a $S_n = \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$ donc la suite (S_n) converge si, et seulement si, (u_n) converge.

□

Exemple Montrons que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ converge.

Étudions la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$$

puis

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} - 2\sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 2\sqrt{n}$$

Ainsi

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + O(1/n)) - 2\sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + 2\sqrt{n} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente donc converge puis (u_n) converge.

Exemple Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_n = \frac{2n}{2n+1} u_{n-1}$ pour $n \geq 1$

Montrons qu'il existe $A > 0$, tel que $u_n \sim \frac{A}{\sqrt{n}}$.

On veut montrer que $v_n = \sqrt{n} u_n$ converge vers un réel > 0 .

Étudions la série $\sum (\ln v_n - \ln v_{n-1})$.

$$\ln v_n - \ln v_{n-1} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n}{n-1} \right) + \ln \left(\frac{2n}{2n+1} \right) = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi $\sum (\ln v_n - \ln v_{n-1})$ est absolument convergente donc la suite $(\ln v_n)$ converge.

En posant ℓ sa limite, $v_n \rightarrow e^\ell = A > 0$ et $u_n \sim \frac{A}{\sqrt{n}}$.

Exercice 9.5.2 La constante d'Euler

Proposition

La suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ est convergente.

dém. :

Nous allons étudier la nature de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$.

On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est absolument convergente donc convergente.

□

Définition

On pose $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$ appelée constante d'Euler.

On a $\gamma = 0,577$ à 10^{-3} près.

Théorème

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

dém. :

Puisque $u_n \rightarrow \gamma$ on peut écrire $u_n = \gamma + o(1)$ donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = \gamma + o(1)$

Cor : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$

□

Exemple Calculons $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

On peut affirmer que cette série alternée converge en vertu du critère spécial.

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$$

donc

$$S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$$

puis

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(2n) + \gamma - \ln n - \gamma + o(1) = \ln 2 + o(1)$$

Par suite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

9.5.3 Produit infini

Exercice

Pour étudier l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n u_k$, on passe au logarithme si le contexte le permet

Exemple Etudions l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$

Pour tout $n \geq 1$, $1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n} > 0$ donc

$$\ln \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$$

or

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{1}{2} \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et

$$\frac{1}{2} \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{k^2}$$

Par équivalence de série à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge et donc

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

converge quand $n \rightarrow +\infty$. En posant ℓ sa limite, on a

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\ell > 0$$

Exemple Soit $\alpha, x \in \mathbb{R}$ avec $|\alpha| < 1$.

Étudions l'existence de la limite de $P_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 - \alpha^k x)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Les premiers facteurs du produit ne sont pas nécessairement strictement positifs, mais puisque $1 - \alpha^k x \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq N, 1 - \alpha^k x > 0$$

Pour $n \geq N$, on peut écrire

$$P_n(x) = P_{N-1}(x) \prod_{k=N}^n (1 - \alpha^k x)$$

Or

$$\ln \left[\prod_{k=N}^n (1 - \alpha^k x) \right] = \sum_{k=N}^n \ln (1 - \alpha^k x)$$

et

$$\ln (1 - \alpha^k x) \sim -\alpha^k x \text{ car } \alpha^k x \rightarrow 0$$

Puisque $|\alpha| < 1$, la série géométrique $\sum \alpha^n$ converge et, par équivalence de série à termes de signe constant, la série $\sum \ln (1 - \alpha^k x)$ converge. Ainsi

$$\sum_{k=N}^n \ln (1 - \alpha^k x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

puis

$$P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P_N(x) e^\ell$$

9.5.4 Musculation : séries de Bertrand

Exercice

Théorème

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge si, et seulement si, } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

CHAPITRE 9. SUITES ET SÉRIES NUMÉRIQUES

dém. :

Cas $\alpha < 1$:

On a

$$n \times \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \rightarrow +\infty$$

donc, à partir d'un certain rang,

$$\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$$

Or la série $\sum 1/n$ diverge et $1/n \geq 0$ donc la série étudiée diverge.

Cas $\alpha > 1$:

On peut introduire $\rho \in]1, \alpha[$ et on a

$$n^\rho \times \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha-\rho} (\ln n)^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc la série étudiée est de terme général négligeable devant $1/n^\rho$ avec $\rho > 1$. Cette série est donc convergente.

Cas $\alpha = 1$ et $\beta \neq 1$:

Par le théorème des accroissements finis

$$\frac{1}{(\ln(n+1))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln n)^{\beta-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\beta-1}{n(\ln n)^\beta}$$

et donc la série étudiée converge si, et seulement si, la suite $(1/(\ln n)^{\beta-1})$ converge i.e. $\beta > 1$.

Cas $\alpha = 1$ et $\beta = 1$:

On exploite

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln(n)}$$

pour conclure que la série étudiée diverge.

□