

Les Séries Numériques

Convergence d'une série.

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes réels ou complexes.

- On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est convergente. Dans ce cas la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée somme de la série et sera notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$$

- la série sera dite divergente si elle ne converge pas.

Proposition

Si une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Fondamentales.

- 1) Soit $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n \geq 0} z^n$ converge $\iff |z| < 1$. Dans ce cas on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{et} \quad \sum_{n=p}^{+\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z}$$

- 2) $\sum_{n \geq 0} e^{-\alpha n}$ converge ssi $\alpha > 0$.

Proposition

La série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge.

Dans le cas de convergence

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_0$$

Définition-Proposition

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série

$\sum_{k \geq n+1} u_k$ est convergente. Sa somme est notée R_n et est appelée reste d'ordre n .

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^p u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{k=0}^n u_k$$

On déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0.$$

✿ Proposition

i) Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ C.V et $\sum_{n \geq 0} v_n$ C.V, alors la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ converge.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

ii) Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ C.V et $\sum_{n \geq 0} v_n$ D.V, alors la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ diverge.

iii) Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ D.V et $\sum_{n \geq 0} v_n$ D.V, on peut rien affirmer pour la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$.

Séries à termes positifs

✿ Proposition

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs. Alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_n$ est majorée $\iff \exists M > 0$ tel que $\sum_{k=0}^n u_k \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

✿ Théorème de majoration

On considère $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles que :

$0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors

i) Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

ii) Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

✿ Théorème d'équivalence

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.

Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même natures.

✿ Série de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente ssi $\alpha > 1$.

✿ Proposition

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes réels positifs.

i) Si $\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ \text{et} \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \end{cases}$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge

ii) Si $\begin{cases} u_n = O(v_n) \\ \text{et} \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \end{cases}$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge

✿ Application : Règle de comparaison $n^\alpha u_n$

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes réels positifs.

i) S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$ et par suite la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

ii) S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq 0 \quad u_n > \frac{1}{n^\alpha}$ et par suite la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Séries absolument convergente

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série numérique. On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente (abs CV) si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Proposition

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle converge et dans ce cas on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

$$\text{abs CV} \Rightarrow \text{CV}$$

Proposition

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes complexes, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum_{n \geq 0} \Re(u_n)$ et $\sum_{n \geq 0} \Im(u_n)$ convergent. Dans ce cas on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Re(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \Im(u_n).$$

On peut déduire que,

$$\Re \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Re(u_n) \quad \text{et} \quad \Im \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Im(u_n)$$

Règle de D'Alembert

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes réels ou complexes telle que

$u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang
et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

alors

- i) Si $l < 1$, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument.
- ii) Si $l > 1$, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement.

Formule de Stirling

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Exemple.

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{e^n n!}$.

Séries alternées

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes réels. On dit que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est alternée si

$$\begin{cases} u_n = (-1)^n |u_n| \\ \text{ou} \\ u_n = (-1)^{n+1} |u_n| \end{cases} \iff u_n u_{n+1} \leq 0$$

Théorème des Séries Alternées (T.S.A)

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes réels.

Si $\begin{cases} \text{la série } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est alternée} \\ \text{la suite } (|u_n|)_n \text{ est décroissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \end{cases}$

alors, $\begin{cases} \text{i) la série } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \\ \text{ii) } |R_n| \leq |u_{n+1}|, \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{iii) La somme } S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ a le même signe que son premier terme.} \\ \text{vi) Le reste } R_n \text{ a le même signe que } u_{n+1}. \end{cases}$

Exemples d'utilisation du D.L

Déterminer la nature de la série de terme général :

i) $u_n = \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

ii) $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \tan\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

Comparaison série et intégrale

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux **positive et décroissante**. On pose

$$w_n = \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

alors

La série $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge.

Produit de Cauchy de deux séries

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes dans K .

On appelle produit de Cauchy des deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ avec

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p v_{n-q}$$

Théorème

Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont absolument convergentes, alors la série produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n$ est absolument convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Somation des relations de comparaison

a) Cas des séries convergentes

Proposition

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes réels ou complexes et $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à termes réels positifs.

i) Si $\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ \text{et} \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \end{cases}$ alors $\begin{cases} \sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \\ \text{et} \\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n = o(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n) \end{cases}$

ii) Si $\begin{cases} u_n = O(v_n) \\ \text{et} \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \end{cases}$ alors $\begin{cases} \sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \\ \text{et} \\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n = O(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n) \end{cases}$

iii) Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes réels positifs.

Si $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ \text{et} \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \end{cases}$ alors $\begin{cases} \sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \\ \text{et} \\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n \end{cases}$

b) Cas des séries divergentes

Proposition

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes à réels ou complexes et $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à termes réels positifs.

i) Si $\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ \text{et} \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ diverge} \end{cases}$ alors $\sum_{k=0}^n u_k = o(\sum_{k=0}^n v_k)$

ii) Si $\begin{cases} u_n = O(v_n) \\ \text{et} \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ diverge} \end{cases}$ alors $\sum_{k=0}^n u_k = O(\sum_{k=0}^n v_k)$

iii) Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes réels positifs.

Si $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ \text{et} \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ diverge} \end{cases}$ alors $\begin{cases} \sum_{n \geq 0} v_n \text{ diverge} \\ \text{et} \\ \sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k \end{cases}$