

Problème 2

Le but de ce problème est de calculer les sommes suivantes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

1) Montrer que les séries suivantes sont convergentes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

2) Pour $t \in [0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt) \quad \text{et} \quad S_n(t) = \sum_{k=1}^n \sin(kt)$$

a) Calculer $C_n(t) + iS_n(t)$ puis déduire que

$$C_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{nt}{2} \cos(\frac{n+1}{2}t)}{\sin \frac{t}{2}} & \text{Si } t \in]0, \pi] \\ n & \text{Si } t = 0 \end{cases}$$

b) Montrer que l'application C_n est continue sur $[0, \pi]$.

3) a) Vérifier que pour tout $t \in]0, \pi]$

$$1 + 2C_n(t) = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin \frac{t}{2}}$$

b) Montrer que l'application $t \mapsto \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin \frac{t}{2}}$ est prolongeable par continuité sur $[0, \pi]$ en une fonction continue qui sera notée h_n .

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$$

b) En déduire que

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) C_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

c) Déduire que

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) h_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6}$$

5) Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t - \frac{t^2}{2\pi}}{\sin \frac{t}{2}} & \text{Si } t \in]0, \pi] \\ 2 & \text{Si } t = 0 \end{cases}$$

6) a) Montrer que f est continue sur $[0, \pi]$ puis qu'elle est de classe C^1 sur $]0, \pi]$.

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt = 0$.

montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

7) Déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \quad \text{et que} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$