

Problème 3 "La règle de Raabe-Duhamel "

Le but de ce problème est de démontrer la règle de Raabe-Duhamel et d'en donner une application.

On considère $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs.

Partie I.

1. Rappeler la règle de D'Alembert.

2. Que peut-on dire de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

On suppose dans la suite du problème que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

Dans cette partie, on considère un réel $\lambda \neq 1$ vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. On suppose dans cette question que $\lambda < 0$.

a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante à partir d'un certain rang.

b) Dédurre que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement.

Soit β un réel et $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{1}{n^\beta}$.

4. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\beta - \lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

5. On suppose que $0 < \lambda < 1$ et on choisit β tel que $\lambda < \beta < 1$.

Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

6. On suppose que $\lambda > 1$ et on choisit β tel que $1 < \beta < \lambda$.

a) Montrer que à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

b) Dédurre que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

7. Déterminer la nature des séries de termes général suivants :

a) $u_n = \frac{2.4.6 \dots (2n)}{3.5.7 \dots (2n+1)}$

b) Pour $n \geq 2$, $u_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

c) Pour α un réel non entier, on considère la suite $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!}$.

Déterminer suivant les valeurs de α la nature de la série de terme général a_n .

8. a) Déterminer la nature des séries de termes généraux suivants :

$w_n = \frac{1}{n}$ et $x_n = \frac{1}{n(\text{Log} n)^2}$.

(Ind : utiliser une comparaison avec une intégrale).

b) Que peut on conclure ?

Partie II.

On suppose dans cette partie que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1. On pose $v_n = nu_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ converge.

2. Dédurre qu'il existe une constante $k > 0$ tel que $u_n \sim \frac{k}{n}$, puis donner la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

3. Soit $(b_n)_n$ une suite à termes réels strictement positifs vérifiant,

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}}.$$

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} b_n$.