

Problème 4 "Produit infini"

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réels non nuls. On pose $(P_n)_{n \geq n_0}$ la suite définie par :

$$P_n = \prod_{k=n_0}^n u_k.$$

On dit que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} u_n$ converge si la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ converge vers une limite finie non nulle.

On dit que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} u_n$ diverge si la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ n'admet pas une limite finie ou bien elle converge vers 0.

1. Montrer que si le produit infini $\prod_{n \geq n_0} u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 1.
2. Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réels non nuls qui converge vers 1.
 - a) Montrer qu'il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, u_n > 0$.
 - b) Montrer que les produits infini $\prod_{n \geq n_0} u_n$ et $\prod_{n \geq 0} u_n$ sont de même nature.
3. On suppose dans cette question que $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de réels strictement positifs.
 - a) Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} \ln u_n$ converge.
 - b)i) Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$ converge si et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

ii) Ce résultat reste-t-il valable si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est à termes quelconques.

(On pourra considérer la suite $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ et étudier la suite

$$\log(\sqrt{n} \prod_{k=1}^n (1 + u_k))$$

c) Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$, alors $\prod_{n \geq 0} (1 - u_n)$ converge si et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

4. Dans cette question, on suppose que la série $\sum_{n \geq 0} (u_n - 1)$ converge.

Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 0} u_n$ a même nature que la série $\sum_{n \geq 0} (u_n - 1)^2$.

5. Donner un exemple où la série $\sum_{n \geq 0} (u_n - 1)$ converge, mais le produit infini $\prod_{n \geq 0} u_n$ diverge.

6. Déterminer la nature des produits infinis suivants :

a) $\prod_{n \geq 1} (1 - \frac{1}{4n^2})$.

b) $\prod_{n \geq 1} (1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2})$, $x \in]-\pi, \pi[$.

c) $\prod_{n \geq 1} (1 + \frac{x}{n}) e^{-\frac{x}{n}}$, $x > 0$.