

Devoir de Synthèse N 1 d'Analyse

Durée: 3 Heures

On rappelle que, pour tout nombre réel x , la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réelles. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **B-convergente** si elle vérifie les propriétés suivantes :

i) $\forall x \in \mathbb{R}$, La série $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$ converge

ii) La fonction $f : x \rightarrow f(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$ admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$

quand $x \rightarrow +\infty$.

Dans ce cas, la limite l s'appelle la **B-limite** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on note $\text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Partie I

1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-2)^n}{n!} x^n$ est convergente et calculer sa somme.

b) Dédurre que la suite $((-2)^n)_{n \geq 0}$ est B-convergente et que $\text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n = 0$.

2) Montrer que la suite $((4)^n)_{n \geq 0}$ n'est pas B-convergente.

3) Soit $a \in \mathbb{R}$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!} x^n$ est convergente et calculer sa somme.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la suite $(a^n)_{n \geq 0}$ soit B-convergente. Donner dans le cas de la B-convergence $\text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} a^n$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est B-convergente et que $\text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

5) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites B-convergentes et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer que la suite $(\lambda u_n + v_n)_{n \geq 0}$ est B-convergente et que

$$\text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} u_n + \text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

Partie II

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0 \\ \text{ii) } \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \geq 0} v_n x^n \text{ est absolument convergente.} \\ \text{iii) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

1) a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On pose, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \text{ et } T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n.$$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = +\infty$.

c) Soit $\varepsilon > 0$.

i) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $|u_n - l v_n| \leq \varepsilon v_n$.

ii) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

$$|S(x) - l T(x)| \leq \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - l v_k| x^k + \varepsilon T(x)$$

puis déduire que,

$$\left| \frac{S(x)}{T(x)} - l \right| \leq \sum_{k=0}^{n_0} \frac{|u_k - l v_k| x^k}{v_{n_0+1} x^{n_0+1}} + \varepsilon$$

d) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{T(x)} = l$.

2) Soient a un réel strictement positif et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \left(1 + \frac{\log a}{n} \right)^{n^2}.$$

a) Montrer que $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} a^n \exp(-\frac{1}{2}(\log a)^2)$.

(Ind : Utiliser le DL de la fonction $x \rightarrow \log(1+x)$ au voisinage de 0).

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$ converge et que sa somme $S(x)$ vérifie :

$$S(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} e^{ax} \exp(-\frac{1}{2}(\log a)^2)$$

c) Etudier alors, suivant les valeurs de a , la B-convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réelles.

a) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente (au sens usuel) alors elle est B-convergente et on a

$$\text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

(Ind : On pourra appliquer II) 1) aux suites $(U_n)_{n \geq 0}$ et $(V_n)_{n \geq 0}$ avec $U_n = \frac{u_n}{n!}$ et $V_n = \frac{1}{n!}$).

b) Montrer, à l'aide d'un contre exemple, que la réciproque est fausse.

Partie III

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réelles. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On

dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est **B-convergente** si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est B-convergente. Dans ce cas, la B-limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'appelle la **B-somme** de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ et on note

$$B \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

1) Soit $a \in \mathbb{R}$

a) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n a^k$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{S_n}{n!} x^n$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ et calculer sa somme.

(Ind : discuter les cas $a = 1$ et $a \neq 1$.)

c) Déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a^n$ est B-convergente si et seulement si $a < 1$ et donner dans

le cas $a < 1$ sa B-somme.

2) Montrer, à l'aide d'un contre exemple, que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ peut être B-convergente sans

l'être au sens usuel.