

Correction

1) La règle de D'Alembert.

2) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$, on peut rien dire sur la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$

par exemple, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et les deux séries

vérifient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$.

3) a) On a : $\lambda < 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \sim -\frac{\lambda}{n}$.

D'où à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 > 0$.

Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geq n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

Alors la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante.

b) On a $(u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante, d'où $\forall n \geq n_0, u_n > u_{n_0}$.

Ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement

4) Soit $v_n = \frac{1}{n^\beta}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^\beta = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-\beta} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ ce qui donne}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\beta - \lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1)$$

5) Soit $\lambda > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \beta < \lambda$.

a) D'après (1) $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \sim \frac{\beta - \lambda}{n} < 0$

Alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ telle que $\forall n \geq n_1, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$

b) Soit $n \geq n_1 + 1$

$$\text{Alors } \prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} \Leftrightarrow \frac{u_n}{u_1} \leq \frac{v_n}{v_1} \Leftrightarrow 0 < u_n \leq v_n \frac{u_1}{v_1}.$$

Comme $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ avec $\beta > 1$, alors la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge et par suite

la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

6) Pour $0 < \lambda < 1$, on choisit $\beta \in \mathbb{R}$ telle que $\lambda < \beta < 1$.

même raisonnement que 3)a) il existe une constante $C > 0$ et $n_2 \in \mathbb{N}$

telle que $\forall n \geq n_2, U_n \geq C \frac{1}{n^\beta}$.

Comme $\beta < 1$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\beta}$ diverge et par suite la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

7)a) Soit $U_n = \frac{2.4 \dots (2n)}{3.5 \dots (2n+1)}$.

$$\text{On a } \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2n+2}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Alors on écrit

$$\begin{aligned} \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{2n}} = \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \left(1 + \frac{3}{2n} \right)^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

D'après la règle de Duhamel la série $\sum_{n \geq 0} U_n$ diverge, puisque $\lambda = \frac{1}{2} < 1$

b) Pour $n \geq 2$, $U_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

$$\begin{aligned} \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \sqrt{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

D'après Duhamel la série diverge car $\lambda = \frac{1}{6} < 1$

c) $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{|\alpha - n|}{n+1} = \left| \frac{n - \alpha}{n+1} \right| = \frac{n - \alpha}{n+1} \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{\alpha+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Or $\alpha \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha+1 \neq 0$ et $\alpha+1 \neq 1$

D'où alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente si $\alpha+1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$.

8)a) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\log n)^2}$

converge (voir exercice série de Bertrand).

Partie II.

On suppose dans cette partie que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
On pose

$$\begin{aligned} v_n &= nu_n \\ \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

D'où $\ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim -\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or la série $\sum_{n \geq 0} -\frac{1}{n^2}$ converge

D'où la série $\sum_{n \geq 0} \ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right) = \sum_{n \geq 0} (\ln(V_{n+1}) - \ln(V_n))$ converge.

2) D'après ce qui précède, on déduit que la suite $(\ln(V_n))_n$ converge vers une limite notée l et par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = e^l \neq 0$

On en déduit $V_n = nu_n \sim e^l$, alors $U_n \sim \frac{e^l}{n}$.

Par conséquent la série $\sum_{n \geq 0} U_n$ diverge puisque la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n}$ diverge.

3) On $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{8} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Ce qui montre que la série $\sum_{n \geq 0} b_n$ diverge.