

Correction

Partie I

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$; on pose $U_n(x) = \frac{(-x)^n}{n!} x^n$
 $\forall x \in \mathbb{R}$; la série $\sum_{n \geq 0} U_n(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-2x)^n}{n!}$ CV
 et $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) = e^{-2x}$

alors $f(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) = e^{-x} \cdot e^{-2x} = e^{-3x}$

b) D'après a) la série $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$ est CV et
 $f(x): x \mapsto e^{-3x}$

Ce qui montre que la suite (a^n) est B-Conv. $\Rightarrow$

2) la série $\sum_{n \geq 0} \frac{4^n}{n!} x^n$ CV vers e^{4x}
 $f(x) = e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n x^n}{n!} = e^{-x} \cdot e^{4x} = e^{3x}$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

D'où la suite (4^n) n'est pas B-Conv.

3) a) $\forall a \in \mathbb{R}$; $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{(ax)^n}{n!}$
 Converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ax)^n}{n!} = e^{ax}$$

b) la suite $(a^n)_{n \geq 0}$ est B-Conv. $\Leftrightarrow$
 $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} \frac{a^n x^n}{n!} \text{ CV } \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < \infty \end{array} \right.$

or $f(x) = e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n x^n}{n!} = e^{-x} \cdot e^{ax}$

$$= e^{x(a-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(a-1)} < \infty$$

$$\Leftrightarrow a-1 \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{a \leq 1}$$

Ainsi la suite $(a^n)_{n \geq 0}$ est B-CV

$$\Leftrightarrow \boxed{a \leq 1}$$

• si $a=1$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \text{B} \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 1$$

• si $a < 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \text{B} \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$$

$$4) \quad U_n = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{U_n}{n!} x^n = \frac{x^n}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} U_n \text{ cv, } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

$$\Rightarrow \forall x > 0: \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_n}{n!} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x} (e^x - 1); \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^x}{x} + \frac{1}{x} = 0$$

$\Rightarrow (U_n)$ est B-cv. et

$$\boxed{\text{B} \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0}$$

5) Si (U_n) est B-convergente
et (V_n) " " "

alors les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_n}{n!} x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{V_n}{n!} x^n$ cv

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_n}{n!} x^n = l < \infty$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{V_n}{n!} x^n = l' < \infty$$

D'où $\forall \lambda \in \mathbb{R}$; la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda U_n + V_n)}{n!} x^n$ cv

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda U_n + V_n)}{n!} x^n = \lambda l + l' < \infty$$

$$\lambda \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{V_n}{n!} x^n \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \text{B} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda U_n + V_n) = \lambda \text{B} \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n + \text{B} \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$$

b) Si (U_n) est B-cv
et (V_n) est B-cv
forcément $(U_n \cdot V_n)$ est B-cv.

Exemple pour $U_n = V_n = (-e)^n$

D'après 1-b; (U_n) est B-cv.

Mais $(U_n \cdot V_n) = (4^n)$ n'est pas B-cv
d'après I-2/.

Exercice II

- i) $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- ii) $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ est abs cv.
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in \mathbb{R}$

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{|v_n|} = |l|$

si $l \neq 0$, alors

$$\forall x \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n x^n|}{|v_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{|v_n|} = |l| \neq 0$$

$\Rightarrow |u_n x^n| \sim |v_n x^n|$ à termes positifs.

comme la série $\sum_{n \geq 0} v_n x^n$ est abs cv

alors $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ est abs cv.

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n x^n \text{ cv.}$$

Pour $x = 0$, elle est aussi cv.

si $l = 0$, alors $|u_n x^n| = o(|v_n x^n|)$

et $\sum_{n \geq 0} v_n x^n$ est abs cv, alors

$$\sum_{n \geq 0} u_n x^n \text{ est abs cv} \Rightarrow \text{cv}$$

b) $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n \gg v_0 + v_1 x, \forall x > 0$

ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_0 + v_1 x = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = +\infty$.

c) soit $\varepsilon > 0$

i) on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq}$

$$\forall n \geq n_0, \left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall n \geq n_0, |u_n - l v_n| < \varepsilon v_n \quad (v_n > 0)$$

ii) soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$|S(x) - l T(x)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |(u_n - l v_n) x^n|$$

$$= \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - l v_k| x^k + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |u_k - l v_k| x^k$$

$$\text{or } \forall n \geq n_0, |u_k - l v_k| \leq \varepsilon \cdot v_k$$

$$\Rightarrow |S(x) - l T(x)| \leq \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - l v_k| x^k + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} v_k x^k$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - l v_k| x^k + \varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} v_k x^k$$

$\Rightarrow$

$$|S(x) - l T(x)| \leq \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - l v_k| x^k + \varepsilon T(x).$$

D'après ce qui précède

$$\left| \frac{S(x)}{T(x)} - l \right| \leq \frac{\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - l v_k| x^k}{T(x)} + \varepsilon.$$

$$\text{Or } T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{v_k x^k}{x^{n_0+1}} \geq v_{n_0+1} x^{n_0+1}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{S(x)}{T(x)} - l \right| \leq \frac{\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - l v_k| x^k}{v_{n_0+1} x^{n_0+1}} + \varepsilon$$

$$d) \text{ On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - l v_k| x^k}{v_{n_0+1} x^{n_0+1}} = 0 \quad (n_0 \text{ fixe})$$

$\Rightarrow$ Pour $\varepsilon > 0$, $\exists A > 0$ tq $\forall x > A$.

$$\sum_{k=0}^{n_0} \frac{|u_k - l v_k| x^k}{v_{n_0+1} x^{n_0+1}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall x > A; \quad \left| \frac{S(x)}{T(x)} - l \right| < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{T(x)} = l$$

e). $a > 0$;

$$u_n = \left(1 + \frac{\ln a}{n}\right)^{n^2}$$

$$= e^{n^2 \ln \left(1 + \frac{\ln a}{n}\right)}$$

$$\text{On a } \frac{\ln a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{donc } \ln \left(1 + \frac{\ln a}{n}\right) = \frac{\ln a}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln a}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow n^2 \ln \left(1 + \frac{\ln a}{n}\right) = n \ln a - \frac{1}{2} (\ln a)^2 + o(1)$$

$$\Rightarrow u_n = e^{n \ln a - \frac{1}{2} (\ln a)^2 + o(1)}$$

$$= a^n e^{-\frac{1}{2} (\ln a)^2} \cdot e^{o(1)}$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{a^n e^{-\frac{1}{2} (\ln a)^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\Leftrightarrow u_n \sim a^n e^{-\frac{1}{2} (\ln a)^2}$$

b). On pose $v'_n = \frac{a^n e^{-\frac{1}{2} (\ln a)^2}}{n!}$ et $u'_n = \frac{u_n}{n!}$

$a > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \quad v'_n > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u'_n}{v'_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

$$\sum_{n \geq 0} v'_n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(a \cdot x)^n}{n!} \cdot e^{-\frac{1}{2} (\ln a)^2}$$

est abs cv

Alors d'après II 1. d. la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{T(x)} = 1 \Leftrightarrow S(x) \sim T(x)$$

$$\text{avec } T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a x)^n}{n!} e^{-\frac{1}{2} (\ln a)^2}$$

$$(1) a^x = e^{ax} = e^{-\frac{1}{2}(2na)^2}$$

c) D'après ce qui précède la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{U_n}{n!} x^n \text{ cv}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_n}{n!} x^n \\ &= e^{-x} \cdot S_L(x) \sim e^{(a-1)x} e^{-\frac{1}{2} \ln a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(a-1)x} < \infty$$

$$\Leftrightarrow a-1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |a| \leq 1$$

Ainsi (U_n) est B.-cv $\Leftrightarrow 0 < a \leq 1$.

3) Si (U_n) est convergente au sens usuel, alors (U_n) est B.-cv.

On pose $V_n = \frac{U_n}{n!}$ et $V_n = \frac{1}{n!}$

$$\bullet V_n > 0$$

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, \text{ la série } \sum_{n \geq 0} V_n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \text{ est abs cv.}$$

$$\frac{U_n}{U_n} = U_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

D'après II.1 la série $\sum_{n \geq 0} U_n x^n$ cv

$$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{U_n x^n}{n!} \text{ cv}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{T(x)} = l$$

$$\text{avec } T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_n}{n!} x^n = l \in \mathbb{R}$$

D'où la suite (U_n) est B.-cv.

b) la suite $(-2)^n$ est B.-cv mais n'est pas cv.

Partie III

1/ $a \in \mathbb{R}$.

$$a) S_n = \sum_{k=0}^n a^k; n \in \mathbb{N}.$$

$$= \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

b) si $a = 1$:

$$a_n = \frac{S_n}{n!} x^n = \frac{(n+1)x^n}{n!}$$

⑤

$$\forall x \neq 0 \quad \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \frac{n+2}{(n+1)^2} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'Alembert $\sum_{n \geq 0} \alpha_n$ est abs CV $\Rightarrow$ CV

• si $x=0 \Rightarrow \alpha_0=1, \forall n \in \mathbb{N}^+, \alpha_n=0$
 $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \alpha_n$ CV.

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; \sum_{n \geq 0} \frac{S_n}{n!} x^n \text{ CV}$$

• si $a \neq 1$,

$$\alpha_n = \frac{S_n}{n!} x^n = \frac{(1-a^n) x^n}{(1-a) n!}$$

$$= \frac{1}{1-a} \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{(ax)^n}{n!} \right)$$

les serie $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{(ax)^n}{n!}$ CV.

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \alpha_n \text{ CV}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} x^n = \frac{1}{1-a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ax)^n}{n!} \right)$$

$$= \frac{1}{1-a} (e^x - e^{ax})$$

puvu $a \neq 1$

(6)

Pour $a=1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1) x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= x \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= x e^x + e^x = \underline{(x+1) e^x}$$

c) On a $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{S_n}{n!} x^n \text{ CV.}$$

• $f(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n x^n}{n!}$

$$= e^{-x} \cdot \frac{1}{1-a} (e^x - e^{ax}) \quad \text{si } a \neq 1$$

$$\begin{cases} x+1 & \text{si } a=1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{1-a} (1 - e^{(a-1)x}) \quad \text{si } a \neq 1$$

$$\begin{cases} x+1 & \text{si } a=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{si } a < 1 \\ +\infty & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

ce qui montre que la suite (S_n)
est B-CV ssi $a < 1$

$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} U_n$ est B-CV ssi $a < 1$

Pour $a < 1$.

$$\begin{aligned} \text{B. } \sum_{n=0}^{+\infty} U_n &= \text{B.} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n U_k \\ &= \text{B.} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \\ &= \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \frac{1}{1-a} \end{aligned}$$

$\geq$ Si on prend $a \leq -1$

D'après ce qui précède $\sum_{n \geq 0} a^n$
est B-CV.

Mais elle n'est pas CV