

Exercices d'applications

Exercice 1 .

Montrer que les séries de terme général U_n suivant sont convergentes et calculer leurs sommes :

- 1) $U_n = \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}, n \in \mathbb{N}^*$ 2) $U_n = e^{-nx}, x > 0, n \in \mathbb{N}$
 3) $U_n = \frac{n^2}{n!}, n \in \mathbb{N}$ 4) $U_n = \text{Log}(1 + \frac{2}{n(n+3)}), n \in \mathbb{N}^*$
 5) $U_n = \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$

Exercice 2 .

Déterminer la nature des séries de terme général U_n suivant :

- 1) $U_n = e^{-an}, a \in \mathbb{R}$ 2) $U_n = \frac{2.4 \dots 2n}{n^n}$ 3) $U_n = ne^{-2n} \ln n,$
 4) $U_n = \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}, 5) U_n = \frac{chn}{ch2n}$ 6) $U_n = \left(\frac{n^2 + 5n + 1}{n^2 + 4n + 1} \right)^{n^2}$
 7) $U_n = \text{Log}(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ 8) $U_n = (-1)^n \frac{\text{Log}(n)}{\sqrt{n}}$
 9) $U_n = \sin(\frac{1}{n}) - \text{Log}(\frac{1}{n} + 1)$ 10) $U_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}).$

Exercice 3 déterminer dans chacun des cas suivants une suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n(x)| \leq \alpha_n, \forall x \in I, \\ \text{et} \\ \text{la série } \sum_{n \geq 0} \alpha_n \text{ converge} \end{cases}$$

a) $u_n(x) = \frac{1}{n^x}, x \in I = [2, +\infty[.$

b) $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{n^2}, x \in I =]0, +\infty[.$

Exercice 4 (Séries de Bertrand).

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère $u_n = \frac{1}{n^\alpha \log^\beta n}, n \geq 2$.

La série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est appelée série de Bertrand.

- Montrer que si $\alpha > 1$ et $\forall \beta \in \mathbb{R}$, alors la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.
- Montrer que si $\alpha < 1$ et $\forall \beta \in \mathbb{R}$, alors la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.
- On suppose dans cette question que $\alpha = 1$.

a) Soit $\beta \geq 1$ et $f(x) = \frac{1}{x \ln^\beta(x)}, x \in [3, +\infty[.$

Justifier que la fonction f est décroissante.

b) En utilisant une comparaison avec une intégrale déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ lorsque $\alpha = 1$ et $\beta \geq 1$.

4. Montrer que si $\alpha = 1$ et $\beta < 1$, alors la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

5. Conclure.

Exercice 5 (D'après MP 2019).

On pose $u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t}{t+n} dt, n \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n).$

1) Calculer $u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

2) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, on notera γ sa somme.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer la somme $\sum_{k=1}^n u_k$ en fonction de γ_n , puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \gamma.$

4) Montrer que $\forall k \geq 2$, $\frac{1}{2k(k+1)} \leq u_k \leq \frac{1}{2k(k-1)}$.

5) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \frac{1}{2n}$.

6) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k + \frac{1}{2(n+1)}$.

Montrer que $0 \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}$.

7) Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}$ pour lequel S_N est une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

Exercice 6

1) Soit (u_n) une suite réelle.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (u_n - u_{n-1})$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge.

2) On considère la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \text{Log}(n)$$

a) Montrer que la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ converge. On notera γ sa limite.

b) Déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \text{Log}(n) + \gamma + o(1)$.

3) a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ est convergente.

b) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(2k+1)} = 3 + 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 4 \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} +$

$$\frac{1}{n+1}$$

c) Déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = 3 - 4\text{Log}2$.

Exercice 7

Soit $\alpha > 1$, on pose $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

1) Montrer que $\forall k \geq 2$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^\alpha} dx$

2) a) Montrer que

$$\frac{1}{\alpha-1} \leq \zeta(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

b) Déduire que $\zeta(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha-1}$

3) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

Montrer que $R_n \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

4) Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} R_n$.

5) Soit $u_n = \frac{1}{n^3 + \sin n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

b) On pose $R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} R_n(u)$ converge.

7) Montrer que pour $\alpha < 1$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

8) Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \log n$.

(Ind : Utiliser la série $\sum_{n \geq 1} \ln(\frac{n+1}{n})$).

9) On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln n$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_{n+1} - u_n$ converge puis déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite notée γ .

10) On pose $v_n = H_n - \ln n - \gamma$.

Montrer que $v_{n+1} - v_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.

11) Déduire que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.

Exercice 8

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle définie par

$$\begin{cases} 0 < a_0 < 1 \\ a_{n+1} = a_n - a_n^2 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

2. a) Montrer que les séries $\sum_{n \geq 0} \ln(1 - a_n)$ et $\sum_{n \geq 0} a_n$ sont divergentes.

a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n^2$ converge.

3. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < \frac{1}{n+1}$.

b) Déduire que la suite $(na_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers une limite notée l .

4. On considère la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $V_n = l - na_n$.

a) Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} V_{n+1} - V_n$.

b) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(V_{n+1} - V_n) = l(l-1)$.

c) En déduire que $l = 1$.

Exercice 9

1) a) Montrer que $\forall k \geq 2, \log(k-1) \leq \int_{k-1}^k \log(x) dx \leq \log k$

b) En déduire que $\log(n!) \sim n \log n$

2) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \log k - n \log n$

Trouver un équivalent de $u_{n+1} - u_n$. En déduire que $\log n! = n \log n - n + o(n)$

3) Pour $n \geq 1$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^n \log k - n \log n + n$

Trouver un équivalent de $v_{n+1} - v_n$, puis en déduire que $\log n! = n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + o(\log n)$.

(On rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$).

4) Pour $n \geq 1$, on pose $w_n = \sum_{k=1}^n \log k - n \log n + n - \frac{1}{2} \log n$

Montrer que $w_{n+1} - w_n = O(\frac{1}{n^2})$. En déduire qu'il existe $k > 0$ tel que $n! \sim k (\frac{n}{e})^n \sqrt{n}$.

Exercice 10

Soit $x \in [0, +\infty[$. On pose $g_n(x) = \frac{x}{n} - \log(1 + \frac{x}{n})$, $\mathbb{N}^*$

1) Montrer que pour tout $x \geq 0$, la série $\sum_{n \geq 1} g_n(x)$ converge.

On pose $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$, $\forall x \geq 0$

2) Soit $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n)$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \gamma_{n+1} - \gamma_n = g_n(1) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

b) Montrer que la suite (γ_n) est convergente et sa limite γ est égale à $F(1)$.

c) Déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log(n) + \gamma + o(1)$ et que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \log(n)$.

3) a) Vérifier que $\forall x \geq 0, x - \log(1+x) = x^2 \int_0^1 \frac{t}{1+tx} dt$.

b) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (1 - \log 2) \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2n^2}$.

c) En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que $(1 - \log 2) \frac{\pi^2}{6} \leq \gamma \leq \frac{\pi^2}{12}$

Exercice 11 "Formule de Stirling"

On considère la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt.$$

1. a) Montrer que $\forall n \geq 2, nW_n = (n-1)W_{n-2}$. b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$ et $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
2. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, nW_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
 b) Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 c) Déduire que
 i) $W_n \sim W_{n+1}$ puis $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
 ii) $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = (n + \frac{1}{2}) \ln n - n - \ln(n!)$.
 a) Montrer que $S_{n+1} - S_n \sim -\frac{1}{12n^2}$.
 b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite notée λ .
 c) Montrer que $n^n e^{-n} \sqrt{n} \sim e^\lambda n!$.
4. a) En utilisant 2) c) montrer que $\lambda = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$.
 b) En déduire la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.
5. a) En utilisant la question 2) a), montrer que $\lambda - S_n \sim \frac{1}{12n}$.
 b) En déduire que

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Exercice 12

1. a) Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge

$$b) \text{ Montrer que } \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx +$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$c) \text{ Montrer que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx = 0.$$

$$d) \text{ Déduire que } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

2. a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n}$ converge.

b) Soit a un réel tel que $0 < a < 1$, montrer que

$$\int_0^a \frac{1}{1-x} dx = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a^k}{k} + \int_0^a \frac{x^{n+1}}{1-x} dx.$$

$$c) \text{ Montrer que } 0 \leq \int_0^a \frac{x^{n+1}}{1-x} dx \leq \frac{a^{n+2}}{(n+2)(1-a)}.$$

$$d) \text{ Déduire que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{x^{n+1}}{1-x} dx = 0.$$

$$e) \text{ Calculer } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$$

Exercice 13

1) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux positive et décroissante. On pose

$$w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

1. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq w_k \leq f(k-1) - f(k).$$

2. Déduire que la série $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge.

3. Montrer que la suite $(\int_0^n f(t)dt)_n$ est convergente ssi la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge et dans ce cas on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n + \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$$

II) On suppose dans cette partie que Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow IK$ une fonctions de classe C^1 .

1. Montrer que $w_n = - \int_{n-1}^n f'(t)(t - n + 1)dt$.

2. Dédurre que si la suite $(\int_0^n |f'(t)|dt)_n$ est convergente, alors la série $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge absolument.

Exercice 14

On considère deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$. On suppose que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante, et converge vers 0 et qu' $\exists M > 0$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |\sum_{k=0}^n v_k| \leq M$.

1) On pose $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$. Montrer que pour tout $n > p \geq 1$,

$$\sum_{k=p}^n u_k v_k = u_n S_n + \sum_{k=p}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) S_k - u_p S_{p-1}.$$

2) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ est convergente.

3) Montrer que $\forall n \geq 0, |\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k v_k| \leq 2Mu_{n+1}$.

4) Soit $\alpha > 0$.

a) Montrer qu'il existe $M > 0$, telle que $\forall n \geq 0, |\sum_{k=0}^n \sin k| \leq M$.

b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^\alpha}$ est convergente.

Exercice 15

On considère les deux suites

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Notons par $\sum_{n \geq 1} c_n$ le produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 1} a_n$ par elle même et par

$\sum_{n \geq 1} d_n$ le produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 1} b_n$ par elle même.

I 1) Montrer que $\sum_{n \geq 1} a_n$ est semi-convergente.

2) Exprimer le terme général c_n .

3) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(n-X)}$.
En déduire que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$

$$|c_n| = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

4) Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} |c_n|$.

5) Conclure la nature de la série $\sum_{n \geq 1} c_n$.

II 1) Montrer que $\sum_{n \geq 1} b_n$ est semi-convergente.

2) Exprimer le terme général d_n .

3) Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\sqrt{k}\sqrt{n-k} \leq n.$$

4) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} d_n$ diverge grossièrement.