

Série II : Séries Numériques

Exercice 1 Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivant :

1) $u_n = n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{2n}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

2) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n}, \forall n \geq 2.$

3) $u_n = x \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}.$

4) a) Soit $x \in \mathbb{R}^+, u_n = (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{\pi e^{-x}}{2n \sin(\frac{\pi}{2} e^{-x})}\right).$

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.

b) i) Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x.$

(Ind : Utiliser la concavité de la fonction $\sin$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.)

ii) Dédurre que $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq \ln\left(1 + \frac{\pi}{2(n+1)}\right), \forall x \geq 0.$

Exercice 2

1) Montrer que la série de terme général u_n est convergente et calculer sa somme :

$u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{2^n}\right)\right).$ (Ind : utiliser $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$).

2) a) Soit a, b deux réelles. Déterminer la nature de la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2).$$

b) Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

3) Soit $x \in]-1, 1[$, Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} nx^n$ est convergente et calculer sa somme.

(Ind : Considerer $\sum_{n=p}^N x^n$.)

Exercice 3 Soit

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2. Montrer que f est 1-périodique.

3. Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2 - x^2}.$

Montrer que g est bien définie sur $] -1, 1[$ et que $g(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x+1}{2}\right).$

Exercice 4

1. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p > n + 1$, Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^p \frac{(-1)^k}{k} = (-1)^{n+1} \left(\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt - (-1)^{p-n} \int_0^1 \frac{t^p}{1+t} dt \right)$$

3. Déduire que $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$

4. Montrer que $R_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt \right)$.

5. Déduire que $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, puis la nature de la série $\sum_{n \geq 1} R_n$.

Exercice 5 "Transformation d'Abel".

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes réels ou complexes, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel

que $|S_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes réels positives et décroissante telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\sum_{k=0}^p u_k v_k = v_p S_p + \sum_{k=0}^{p-1} (v_k - v_{k+1}) S_k$$

2. Déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ converge.

3. Etudier suivant les valeurs des réels α et θ la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k v_k$.

Montrer que $|R_n| \leq 2M v_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 "D'après MP2011".

1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On pose

$$D_a = \{x > 0 \text{ tel que la série, } \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^x} \text{ est abs convergente.}\}$$

2. a) Montrer que si $\alpha \in D_a$, alors $[\sigma, +\infty[\subset D_a$.

b) Déduire que si D_a est non vide, alors D_a est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

3. Déterminer D_a dans les cas suivants :

a) $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) $a_n = n!$.

On considère la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et on suppose quelle est absolument convergente en tout point $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ ($R \in \mathbb{R}^*$).

4. On suppose dans cette question que $R > 1$.

a) Justifier qu'il existe $r > 1$ tel que la série $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ est absolument convergente.

b) Déduire que $\forall x > 0$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^x}$ est abs convergente et que

$$D_a =]0, +\infty[.$$

5. On suppose dans cette question que $R < 1$ et qu'il existe $R < r < 1$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

a) Montrer que $\forall x > 0$, $a_n r^n = o\left(\frac{a_n}{n^x}\right)$.

b) Déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^x}$ diverge absolument.

c) Déduire que $D_a = \emptyset$.

6. On suppose dans cette question que $D_a \neq \emptyset$ et on considère $\sigma_a = \inf D_a$.

Soit $\alpha > \sigma_a$, montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \ln(n) \frac{a_n}{n^\alpha}$ est absolument convergente.

Exercice 7 "D'après MP2005".

On appelle série de Dirichlet toute série de la forme : $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ où $z \in \mathbb{C}$,

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs, strictement croissante et non majorée.

Pour toute série de Dirichlet, $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$, on désigne par :

$$D_c = \{x \in \mathbb{R}, \text{ tel que la série } \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n x} \text{ converge}\}$$

$$D_a = \{x \in \mathbb{R}, \text{ tel que la série } \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n x} \text{ converge absolument}\}.$$

On définit l'abscisse de convergence par : $\sigma_c = \inf D_c$.

L'abscisse de convergence absolue par : $\sigma_a = \inf D_a$.

Par convention : $\sigma_c = +\infty$ si $D_c = \emptyset$ et $\sigma_a = +\infty$ si $D_a = \emptyset$.

Soit $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ une série de Dirichlet d'abscisse de convergence σ_c et d'abscisse de convergence absolue σ_a .

1. Montrer que $\sigma_c \leq \sigma_a$.

2. Montrer que si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs, alors $\sigma_c = \sigma_a$.

3. a) Déterminer les abscisses σ_c et σ_a de la série de Dirichlet $\sum_{n \geq 1} e^{-\ln(n)z}$.

b) Déterminer les abscisses σ_c et σ_a de la série de Dirichlet $\sum_{n \geq 1} (-1)^n e^{-\ln(n)z}$.

4. On considère la série de Dirichlet, $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\ln(n)z}$ et $\varepsilon > 0$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^x}$ converge. Justifier que la série la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^{x+1+\varepsilon}}$ est absolument convergente.

b) Dédurre que $\sigma_c \leq \sigma_a \leq 1 + \sigma_c$.

5. Soit $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ une série de Dirichlet telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\lambda_n} = b \geq 0$.

a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \lambda_n \geq \frac{\ln(n)}{\varepsilon + b_n}.$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que la série $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n x}$ converge. on considère $\varepsilon > 0$

et $\alpha > 0$, montrer que la série $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n x'}$ est absolument convergente

avec $x' = x + (1 + \alpha)(b + \varepsilon)$.

Dédurre que $\sigma_c \leq \sigma_a \leq b + \sigma_c$.