

Correction "Séries Numériques"

Exercice 1

$$\Downarrow U_n = \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n} \sim \frac{1}{n^3}$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ est à termes positifs et convergente, alors
alors $\boxed{\sum_{n \geq 1} U_n \text{ C.V.}}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3 + 3k^2 + 2k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $F(x)$ suivante, on obtient

$$F(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+2}$$

Donc

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{n+2}$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n} = \frac{1}{4}}$$

$$2) U_n = \frac{e^{-nx}}{n!}; \quad x > 0.$$

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{U_n}{e^{-x}}$ est une série géométrique de raison e^{-x} .

Comme $x > 0$, alors $0 < e^{-x} < 1 \Rightarrow \boxed{\sum_{n \geq 0} U_n \text{ C.V.}}$

$$\dots \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} U_n = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} U_n = \frac{1}{1 - e^{-x}}; \quad \forall x > 0}$$

$$3) U_n = \ln \left(1 + \frac{e}{n(n+3)} \right) \sim \frac{e}{n(n+3)} \sim \frac{e}{n^2}$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ C.V. (Riemann $e > 1$)

(1)

Alors la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ CV

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{e}{k(k+3)}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k(k+3)+e}{k(k+3)}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{(k+e)(k+1)}{k(k+3)}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) + \sum_{k=1}^n (\ln(k+e) - \ln(k+3)) \\ &= \ln(n+1) + \ln 3 - \ln(n+3) \\ &= \ln(3) + \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= \ln 3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{e}{n(n+3)}\right) = \ln 3.$$

4) $u_n = \frac{x^n}{n!}; \quad x \in \mathbb{R}.$

• Si $x=0$, alors $u_0 = 1, u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^+$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV et } \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 = e^0$$

• Si $x \neq 0$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$$

D'après D'Alembert. $\sum_{n \geq 0} u_n$ est abs. conv.

* Soit $x \neq 0$, et $n \in \mathbb{N}$. ($f(x) = e^x$ est C $^\infty$)
D'après la formule de Taylor-Lagrange

$$\begin{aligned} \exists c \in]0, x[\text{ (ou }]x, 0[) \\ e^x = f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \\ = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \end{aligned}$$

On a: $0 < c_n < x \Rightarrow 1 < e^{c_n} < e^x$

$x < c_n < 0 \Rightarrow e^x < e^{c_n} < 1$

Alors la suite (e^{c_n}) est bornée
et on a: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$

On déduit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x.$

cl

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

5) $u_n = \frac{n^e}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(n+1)^e}{(n+1)!} \frac{n!}{n^e} = \frac{n+1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV.}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1) + n}{n!}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 2e.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e}$$

Exercice 2

$$\text{1) } \sum_{n \geq 0} e^{\alpha n} = \sum_{n \geq 0} (e^{\alpha})^n \quad \text{Série géométrique}$$

CV SSI' $|e^{\alpha}| < 1$

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} U_n \text{ CV SSI } 0 < \alpha}$$

$$\text{2) } U_n = \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{n^n}$$

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2 \cdot 4 \cdots 2n}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 2 e^{-n \ln(1 + \frac{1}{n})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2e^{-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{2}{e} > 1.$$

D'Alembert $\left[\sum_{n \geq 1} U_n \text{ diverge} \right]$

3) On a $U_n = n e^{-2n} \ln n$.

$$n^2 U_n = n^3 e^{-2n} \ln n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow U_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est CV (Riemann $p > 1$)

Alors, la série $\left[\sum_{n \geq 1} U_n \text{ CV} \right]$

4) $U_n = \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}$

On considère $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

$$n^{\alpha} U_n = \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2} - \alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow U_n = o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$$

Comme $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ CV, d'où $\left[\sum_{n \geq 1} U_n \text{ CV} \right]$

5) $U_n = \frac{ch_n}{chen}$

$$\text{On a } ch_n \sim e^n \text{ et } chen \sim e^n \Rightarrow U_n \sim e^n$$

D'après exp 1. $\sum_{n \geq 0} e^n$ est une série à termes

positives convergente

Alors $\left[\sum_{n \geq 0} U_n \text{ CV} \right]$

6) $U_n = \left(\frac{n^2 + 5n + 1}{n^2 + 4n + 1} \right)^{n^2} = e^{n^2 \ln \left(\frac{n^2 + 5n + 1}{n^2 + 4n + 1} \right)}$

③

$$= e^{n^2} \ln \left(1 + \frac{n}{n^2 + 4n + 1} \right)$$

Comme $\frac{n}{n^2 + 4n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors

$$\ln \left(1 + \frac{n}{n^2 + 4n + 1} \right) \sim \frac{n}{n^2 + 4n + 1} \sim \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow n^2 \ln \left(1 + \frac{n}{n^2 + 4n + 1} \right) \sim n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

D'où $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \neq 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{n \geq 0} U_n \text{ div}}$

7) $U_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$
 On a $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (mais ne garde pas un signe constant)

$$\Rightarrow U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

• La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ vérifie T.S.A. alors elle CV

• $1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n}$
 $\sum_{n \geq 1} -\frac{1}{2n}$ a terns négative et diverge.

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ diverge}$$

D'où $\boxed{\sum_{n \geq 1} U_n \text{ diverge}}$

8) $U_n = (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

La série $\sum_{n \geq 1} U_n$ est alternée.

• $|U_n| = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

• Il faut la suite $(|U_n|)$ est décroissante.

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; $x \gg 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x$$

$$= \frac{e - \ln x}{x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \gg e^2 \approx 7.39$$

$\Rightarrow \exists n_0 = E(e^2) + 1 = 8$
 $\forall n \geq n_0$, la suite $(|U_n|)$ est $\downarrow$.

D'après T.S.A.

$$\sum_{n \geq n_0} U_n \text{ CV} \Leftrightarrow \boxed{\sum_{n \geq 1} U_n \text{ CV}}$$

9) $U_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$U_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow U_n \sim \frac{1}{2n}$$

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ CV} \Rightarrow \boxed{\sum_{n \geq 1} U_n \text{ CV}}$

$$\begin{aligned}
 &= \cos\left(\sqrt{n^2 + n + 1}\right) \\
 &= \cos\left(\pi n \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right) \\
 &= \cos\left[\pi n \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right] \\
 &= \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8}\frac{\pi}{n} - \frac{3}{16}\frac{\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
 &= (-1)^n \sin\left(\frac{3}{8}\frac{\pi}{n} - \frac{3}{16}\frac{\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
 &= (-1)^n \left(\frac{3}{8}\frac{\pi}{n} - \frac{3}{16}\frac{\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
 &= (-1)^n \cdot \frac{3}{8}\frac{\pi}{n} - \frac{3}{16}(-1)^n \frac{\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
 &= (-1)^n \frac{3}{8}\frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

D'après T.S.A. $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{3\pi}{8n} \text{ CV} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ CV} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} U_n \text{ CV}$

Exercice 3

a) $U_n(x) = \frac{1}{n^x} ; x \in [2, +\infty[$
 $= e^{-x \ln n}$

Puisque $x \geq 2$, alors la fonction $x \mapsto e^{-x \ln n}$ est décroissante, alors

Ainsi $\begin{cases} |U_n(x)| \leq U_n(2) \quad \forall x \geq 2 \\ |U_n(x)| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \geq 2 \end{cases}$
 et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ CV}$

b) $U_n(x) = \frac{1}{n^x} e^{-nx} \quad x \in]0, +\infty[$
 La fonction $x \mapsto U_n(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$\forall x > 0: U'_n(x) = \frac{1}{n^x} (e^{-nx} - n x e^{-nx})$
 $= \frac{1}{n^x} e^{-nx} (1 - nx)$

$U'_n(x) = 0 \Leftrightarrow nx = 1$

D'après le T.V.

$\sup_{x \in]0, +\infty[} |U_n(x)| = U_n\left(\frac{1}{n}\right)$

$x \in]0, +\infty[\Rightarrow U_n(x) \leq \frac{1}{n^3} e^{-1}$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-1}}{n^3} \text{ CV}$

	0	$\frac{1}{n}$	+
U'_n		+	-
U_n			

Exercice 6

$\sum_{n \geq 1} U_n - U_{n-1} \text{ CV} \Leftrightarrow$ la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ CV}$
 $\Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^n (U_k - U_{k-1})\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ CV}$

$\Leftrightarrow (U_n - U_0)_{n \in \mathbb{N}} \text{ CV}$

$\Leftrightarrow$ la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ CV}$

2) $W_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$

a) $W_n - W_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1)$
 $= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$

$W_n - W_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
 $= \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$\Rightarrow w_n - w_{n-1} = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$
 $\Rightarrow$ Comme la série $\sum_{n \geq 1} -\frac{1}{2n^2}$ cv et lauj.
 négative, alors la série $\sum_{n \geq 1} w_n - w_{n-1}$ cv.
 D'après la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ converge vers
 une limite notée γ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \gamma \Leftrightarrow w_n = \gamma + o(1)$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$

$\exists) a) \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} \sim \frac{1}{2n^3}$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ cv et positive
 alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ cv.

$b) \text{ soit } F(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}$

La décomposition en éléments simples.

$F(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}$

$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{2x+1}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+; \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1}$

$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - 4 \left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - 1 \right)$

$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - 1 \right) - 4 \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

$= 3 + 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 4 \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}$

c) D'après a) b) on déduit que

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(2k+1)} = 3 + 4(\ln(n) + \gamma + o(1)) - 4(\ln(2n+1) + \gamma + o(1)) + \frac{1}{n+1}$

$= 3 - 4\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} + o(1)$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(2k+1)} = 3 - 4\ln(2)$

$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = 3 - 4\ln(2)}$

Exercice 8

$\begin{cases} 0 < a_0 < 1 \\ a_{n+1} = a_n - a_n^2 \end{cases}$

$\forall n; \forall n \in \mathbb{N}; 0 < a_n < 1$

$a_{n+1} = a_n - a_n^2 = a_n(1 - a_n)$

Pour $n=0$, le résultat est vrai.
 Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons le résultat est vrai à
 l'ordre n et montrons pour $n+1$.

On a. $0 < a_n < 1 \Rightarrow 0 < 1 - a_n < 1$
 D'où. $0 < a_n(1 - a_n) < 1$

$$0 < a_{n+1} < 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; 0 < a_n < 1.$$

D'autre part: $a_{n+1} - a_n = -a_n^2 < 0$

$\Rightarrow$ la suite (a_n) est ~~strictement~~ décroissante et comme elle est majorée par 0, alors elle converge vers une limite l .

$$\text{Comme } a_{n+1} = a_n - a_n^2$$

avec $f(x) = x - x^2$ et $a_n = f(a_n)$ fonction continue alors l vérifie: $l = l - l^2 \Leftrightarrow l = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$e) a) \text{ On a: } \ln(a_{n+1}) = \ln(a_n) + \ln(1 - a_n)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \ln(1 - a_k) = \sum_{k=0}^n \ln(a_{k+1}) - \ln(a_k) \\ = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_0)$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ (car $a_n \rightarrow 0$)

$$\text{D'où } \sum_{n \geq 0} \ln(1 - a_n) \text{ diverge}$$

$\rightarrow$ Puisque $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors $\ln(1 - a_n) \sim -a_n$.
Comme $-a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, et $\sum_{n \geq 0} \ln(1 - a_n)$ div.
Alors $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge.

$$b) a_n^* = a_n - a_{n+1}$$

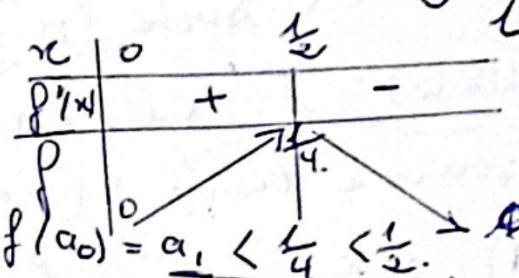
$$\sum_{n \geq 0} a_n^* = \sum_{n \geq 0} (a_n - a_{n+1}) \text{ converge car la suite } (a_n)_{n \geq 0} \text{ c.v.}$$

$\forall n$ Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}; a_n < \frac{1}{n+1}$$

Pour $n=0$, $a_0 < 1$ vérifiée.

Soit $f(x) = x - x^2$, $x \in [0, 1]$
est dérivable sur $[0, 1]$:
 $\forall x \in [0, 1]: f'(x) = 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.



Puisque $0 < a_0 < 1 \Rightarrow f(a_0) = a_1 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $a_n < \frac{1}{n+1}$

et montrons que $a_{n+1} < \frac{1}{n+2}$.

$\forall n \geq 1: \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} \Rightarrow a_n < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}$.
D'après le T.V. de f , on déduit $f(a_n) < f(\frac{1}{n+1})$.

$$\Rightarrow a_{n+1} < \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{(n+1)^2}$$

$$\text{Or } \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2} \quad \left(\text{car } (n+2)n = n^2 + 2n < (n+1)^2 \right)$$

D'où $a_{n+1} < \frac{1}{n+2}$.

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n < \frac{1}{n+1}$$

⊕

b) $\forall n \in \mathbb{N}; a_n < \frac{1}{n+1}$
 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; n a_n < \frac{n}{n+1} < 1$
 D'où la suite $(n a_n)_{n \geq 0}$ est majorée ①

De plus

$$\begin{aligned} (n+1)a_{n+1} - n a_n &= (n+1)(a_n - a_n^2) - n a_n \\ &= a_n - (n+1)a_n^2 \\ &= \underbrace{a_n}_{>0} \underbrace{(1 - (n+1)a_n)}_{>0} > 0 \end{aligned}$$

D'où la suite $(n a_n)_{n \geq 0}$ est croissante ②

11.2) la suite $(n a_n)_{n \geq 0}$ est convergente
 vers une limite notée l .

4) Soit $v_n = l - n a_n$.

a) Puisque la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est croissante
 alors la série $\sum_{n \geq 0} (v_{n+1} - v_n) \in \mathbb{R}$.

b)
$$\begin{aligned} n(v_{n+1} - v_n) &= n[l - (n+1)a_{n+1} - l + n a_n] \\ &= n[n a_n - (n+1)a_{n+1}] \\ &= n[n a_n - (n+1)(a_n - a_n^2)] \\ &= n[a_n [n - (n+1)(1 - a_n)]] \end{aligned}$$

$$= n a_n [(n+1)a_n - 1]$$

$$= n a_n [n a_n + a_n - 1]$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} n(v_{n+1} - v_n) = l(l-1)$.

c) Supposons que $l(l-1) \neq 0$
 On a $\lim_{n \rightarrow \infty} n(v_{n+1} - v_n) = l(l-1)$, alors

$$n(v_{n+1} - v_n) \sim l(l-1)$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} - v_n \sim \frac{l(l-1)}{n}$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n) \in \mathbb{R}$, on trouve une absurdité, puisque

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ div}$$

$$l(l-1) = 0 \Leftrightarrow l=0 \text{ ou } l=1$$

Alors $l=0$
 Comme la suite $(n a_n)$ est croissante et $l=0$
 vers $l=0 \Rightarrow l = \sup \{n a_n, n \in \mathbb{N}\}$
 $\Rightarrow n a_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ impossible

Ainsi $\boxed{l=1}$

Exercice 5.

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t}{t+n} dt = \frac{1}{n} \int_0^1 \left(1 - \frac{n}{t+n}\right) dt \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \left[n \ln(t+n)\right]_0^1\right) \\ &= \frac{1}{n} (1 - n \ln(n+1) + n \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

2) En utilisant un développement limité, on déduit :

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est à termes positif convergente, alors la série

$\sum_{n \geq 1} U_n$ converge.

3) On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n U_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \gamma_n - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \gamma_n - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

On en déduit, $\gamma_n = \sum_{k=1}^n U_k + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma$

4) Soit $k \geq 2$; on a : $U_k = \frac{1}{k} \int_0^1 \frac{t}{t+k} dt$.

Comme $0 \leq t \leq 1$, alors $k-1 \leq k \leq t+k \leq k+1$, d'où $\frac{t}{k+1} \leq \frac{t}{t+k} \leq \frac{t}{k-1}$. Alors;

$$\frac{1}{k+1} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{t}{t+k} dt \leq \frac{1}{k-1} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1.$$

Ainsi

$$\frac{1}{2k(k+1)} \leq U_k \leq \frac{1}{2k(k-1)}.$$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^*$;
 $\forall p > n+1$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k(k+1)} \leq \sum_{k=n+1}^p U_k \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^p \left(\frac{1}{k(k-1)}\right)$$

$$\text{Or } \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^p \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{p+1}$$

$$\text{et } \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^p \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{p}.$$

En passant à la limite quand $p \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k \leq \frac{1}{2n}$$

$$6) \gamma - S_n = \sum_{k=0}^{\infty} U_k - \sum_{k=0}^n U_k - \frac{1}{2(n+1)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k - \frac{1}{2(n+1)}.$$

En utilisant la question 5) et le fait que $U_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$, on déduit

$$0 \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

7) On choisit un entier N tel que $\frac{1}{2N(N+1)} \leq 10^{-3}$ pour obtenir S_N une valeur approché de γ à 10^{-3} près ce qui est équivalent à $N(N+1) \geq 500$, alors il faut que $N \geq \frac{\sqrt{2001} - 1}{2}$. On peut choisir par exemple $N = 22$.

Exercice 9

1) a) Soit $k \geq 2$; pour tout réel x tel que $k-1 \leq x \leq k$: on a

$$\ln(k-1) \leq \ln x \leq \ln k, \text{ alors } \ln(k-1) \leq \int_{k-1}^k \ln x dx \leq \ln k.$$

b) D'après a), on déduit pour $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^n \ln(k-1) \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln x dx \leq \sum_{k=2}^n \ln k$$

$$\ln\left(\prod_{k=2}^n (k-1)\right) \leq \int_1^n \ln(x) dx \leq \ln\left(\prod_{k=2}^n k\right).$$

D'où

$$\ln(n-1)! \leq [x \ln x - x]_1^n \leq \ln(n!)$$

Alors,

$$\ln(n-1)! \leq n \ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!).$$

Ceci nous permet de déduire l'encadrement suivant :

$$n \ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1) \ln(n+1) - n.$$

D'où

$$1 - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{\ln n!}{n \ln n} \leq \frac{(n+1) \ln(n+1)}{n \ln n} - \frac{1}{\ln(n)}.$$

Comme $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ et $n+1 \sim n$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \ln(n+1)}{n \ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)} = 1$$

$$\text{et on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n \ln(n)} = 1$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln(n)} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\ln(n!) \sim n \ln(n)}$$

$$2) \text{ Soit } n \geq 1; U_n = \sum_{k=1}^n \ln k - n \ln(n)$$

on a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \ln(k) - (n+1) \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k + n \ln n \\ &= \ln(n+1) - (n+1) \ln(n+1) + n \ln(n) \\ &= \ln(n+1) - n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln(n+1) \\ &= -n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim -n \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Alors $U_{n+1} - U_n \sim -1$.

Ceci nous permet de déduire que

$$\sum_{k=1}^{n-1} (U_{k+1} - U_k) \sim \sum_{k=1}^{n-1} (-1) = -(n-1) \sim -n$$

C'est équivalent à : $U_n - U_1 \sim -n$, donc

$$U_n - U_1 = -n + o(n) \Rightarrow U_n = -n + U_1 + o(n) = -n + o(n)$$

Comme,

$$U_n = \sum_{k=1}^n \ln k - n \ln(n) = \ln n! - n \ln(n)$$

Alors,

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + o(n).$$

$$3) \text{ Soit } n \geq 1; v_n = \sum_{k=1}^n \ln k - n \ln(n) + n = U_n + n$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= U_{n+1} - U_n + (n+1) - n = U_{n+1} - U_n + 1 \\ &= -n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 = -n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + 1 \\ &= \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Puisque la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n}$ diverge, on déduit que

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \sim \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} \sim \frac{1}{2} \ln(n-1) \sim \frac{1}{2} \ln(n).$$

Alors $v_n - v_1 = \frac{1}{2} \ln(n) + o(\ln(n))$.

D'où, $\ln(n!) = n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(n) + 1 + o(\ln(n))$.

Comme $1 = o(\ln(n))$, alors

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(n) + o(\ln(n)).$$

4) On a $w_n = v_n - \frac{1}{2} \ln(n)$, alors

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= v_{n+1} - v_n - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= -n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Puisque la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge alors la série $\sum_{n \geq 0} w_{n+1} - w_n$ converge

ce qui implique que la suite (w_n) converge vers une limite notée $l \in \mathbb{R}$ ce ci équivaut à

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left[\frac{(n!)e^n}{n^n \sqrt{n}}\right] &= l \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n!)e^n}{n^n \sqrt{n}} = e^l = k > 0 \\ &\iff n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Exercice 10

1)a) La série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est alternée

On pose $U_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. On a :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \\ \text{la suite } (|U_n|)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \end{cases}$$

Alors, d'après T.S.A, la série $\sum_{n \geq 0} U_n$ converge.

b) On remarque que $\int_0^1 x^{2k} dx = \frac{1}{2k+1} [x^{2k+1}]_0^1 = \frac{1}{2k+1}$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-x^2)^k dx \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 + x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} dx \end{aligned}$$

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1 + x^2} dx = 0$

on a $1 + x^2 \geq 1$, alors :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1 + x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n+1} dx = \frac{1}{2n+2}.$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1 + x^2} dx = 0$.

d) En passant à la limite dans la 2^{ème} question on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = [\text{Arctg} x]_0^1 = \text{Arctg} 1 - \text{Arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Ainsi } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

2) Soit $U_n = \frac{a^n}{n2^n}$; $0 < a < 1$.

a) On a : $\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} < 1$.

D'après D'Alembert, la série $\sum_{n \geq 1} U_n$ converge.

3) a) Soit $0 < a < 1$:

$\forall x \in [0, a]$, on a : $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

D'où,

$$\int_0^a \sum_{k=0}^n x^k dx = \int_0^a \frac{1}{1-x} dx - \int_0^a \frac{x^{n+1}}{1-x} dx$$

$$\sum_{k=0}^n \int_0^a x^k dx = \int_0^a \frac{1}{1-x} dx - \int_0^a \frac{x^{n+1}}{1-x} dx$$

$$= \sum_{k=0}^n \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^a$$

Ainsi $\int_0^a \frac{1}{1-x} dx = \sum_{k=0}^n \frac{a^{k+1}}{k+1} + \int_0^a \frac{x^{n+1}}{1-x} dx$

$$\int_0^a \frac{1}{1-x} dx = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a^k}{k} + \int_0^a \frac{x^{n+1}}{1-x} dx.$$

b) On a $\forall x \in [0, a] : 1-x \geq 1-a$, alors

$$0 \leq \int_0^a \frac{x^{n+1}}{1-x} dx \leq \int_0^a \frac{x^{n+1}}{1-a} dx = \frac{1}{1-a} \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^a = \frac{a^{n+2}}{(n+2)(1-a)}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{n+2}}{(n+2)(1-a)} = 0$, Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{x^{n+1}}{1-x} dx = 0$.

D'après 2) on a $\int_0^a \frac{1}{1-x} dx = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a^k}{k} + \int_0^a \frac{x^{n+1}}{1-x} dx$

$n \rightarrow +\infty$ on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{1}{1-x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a^k}{k}$$

D'où $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^k}{k} = -\ln(1-a), \forall a \in [0, 1[.$

4) D'après 3) il suffit de prendre $a = \frac{1}{2}$, on obtient $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2$.

Exercice 7

1) Pour $\alpha > 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. On

déduit $\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^\alpha} dx$.

2) a) Puisque la relation $\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{k^\alpha}$ est valable pour tout $k \geq 1$,

alors $\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \Rightarrow \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on déduit $\frac{1}{\alpha-1} \leq \xi(\alpha)$.

D'autre part on a $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x^\alpha} dx \Leftrightarrow \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \dots$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on déduit $\xi(\alpha) - 1 \leq \frac{1}{\alpha-1}$.

En combinant les deux résultats, on obtient :

$$\frac{1}{\alpha-1} \leq \xi(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

b) D'après a)

$$1 \leq \frac{\xi(\alpha)}{\frac{1}{\alpha-1}} \leq (\alpha-1) + 1$$

D'où $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\xi(\alpha)}{\frac{1}{\alpha-1}} = 1 \Leftrightarrow \xi(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha-1}$.

3) Soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

D'après 1) $\forall p > n, \int_{n+1}^p \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^p \frac{1}{x^\alpha} dx$, alors

$$\frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{n+1}^p \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_n^p$$

$$\frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{p^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right) \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{p^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right).$$

En passant à limite quand p tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \Rightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} \leq \frac{R_n}{\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}} \leq 1$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_n}{\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}} = 1 \Leftrightarrow R_n \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

4) Puisque $R_n \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ est convergente si et seulement si $\alpha-1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$.

D'où la série $\sum_{n \geq 0} R_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$

5) Soit $U_n = \frac{1}{n^3 + \sin n}$, $n \geq 1$.

$$\text{On a : } \frac{U_n}{\frac{1}{n^3}} = \frac{n^3}{n^3 + \sin n} = \frac{1}{1 + \frac{\sin n}{n^3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

D'où $U_n \sim \frac{1}{n^3}$

Comme la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge, alors $R_n(U_n) \sim R_n\left(\frac{1}{n^3}\right) =$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

$$\text{D'après 3) } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{3-1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2n^2}$$

Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} R_n(U_n)$ converge.

6) On a : $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs et divergente, alors la série $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ diverge et on déduit aussi que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(n+1) \sim \ln n.$$

9) On a : $u_n = H_n - \ln n$, alors $u_{n+1} - u_n =$

Puisque la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs et convergente, alors la série $\sum_{n \geq 1} U_{n+1} - U_n$ converge. Ceci nous permet de déduire que la suite $(U_n)_n$ converge. On note γ sa limite.

10) On $v_n = H_n - \ln n - \gamma$, alors $v_{n+1} - v_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.

Comme la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, alors $R_n(v_{n+1} - v_n) \sim R_n\left(-\frac{1}{2n^2}\right)$.

D'après question 3) $R_n\left(-\frac{1}{2n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n}$.

De plus $R_n(v_{n+1} - v_n) = \lim_{p \rightarrow +\infty} v_{p+1} - v_n = -v_n$. Ainsi $v_n \sim \frac{1}{2n} \Leftrightarrow$

$$v_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ceci nous permet de conclure que

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

12

$$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt$$

a) $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-2} (\sin t)^2 dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-2} (1 - \cos^2 t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-2} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t) (\sin t)^{n-2} dt$$

$u = \cos t$
 $u' = -\sin t$
 $du = -\sin t dt$

IP-P $w_{n-2} = \left[\frac{\cos t (\sin t)^{n-1}}{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^n}{n-1} dt$

$$\Rightarrow w_n = w_{n-2} - \frac{1}{n-1} w_n$$

$$\Rightarrow [n w_n = (n-1) w_{n-2}] \quad \forall n \geq 2$$

b) D'après a)

$$\textcircled{*} \begin{cases} w_{2n} = \frac{2n-1}{2n} w_{2n-2} \\ w_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} w_{2n-1} \end{cases} \quad \forall n \geq 1$$

Mq. $w_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Supposons que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt = 0$

or $t \mapsto (\sin t)^n$ est continue et positive

Alors $(\sin t)^n = 0, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Leftrightarrow \sin t = 0$ " " impossible

D'où $w_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

D'après $\textcircled{*}$

$$\prod_{k=1}^n w_{2k} = \prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)}{2k} \cdot w_{2k-2}$$

$$\Leftrightarrow w_{2n} = \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{2^n n!} w_0$$

$w_0 = \frac{\pi}{2}$

$$w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!}$$

De m. on a

a) soit $\alpha_n = n w_n w_{n-1}$

$$\Rightarrow \alpha_{n+1} = (n+1) w_{n+1} w_n = n w_n w_{n-1}$$

$$\Rightarrow \alpha_{n+1} = \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

D'où $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une suite constante

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = \alpha_1 = w_1 w_0 = \frac{\pi}{2}$$

b) on a $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$0 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (\sin x)^{n+1} \leq (\sin x)^n$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (\sin x)^{n+1} dx \leq \int_0^1 (\sin x)^n dx$$

$$\Leftrightarrow w_{n+1} \leq w_n \Rightarrow (w_n)_{n \geq 0} \text{ suite décroissante}$$

c) i) on a $(n+1) w_{n+1} = n w_n$

$$\Rightarrow \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{n}{n+1} \frac{w_{n-1}}{w_n}$$

or $w_{n-1} \geq w_n \Rightarrow \frac{n}{n+1} \frac{w_{n-1}}{w_n} \geq \frac{n}{n+1}$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+1} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 \Leftrightarrow |w_{n+1} \sim w_n|$$

D'après a) : $w_n w_{n-1} \sim \frac{\pi}{2n} \Rightarrow$
 Puisque $w_n \sim w_{n-1}$
 $w_n \sim \frac{\pi}{2n} \Rightarrow |w_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}|$

ii) on a $w_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$
 et $w_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 2^n = \frac{2^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{2^n}{\sqrt{\pi n}} \right|$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = (n + \frac{1}{2}) \ln n - n - \ln n!$
 a) $S_{n+1} - S_n = (n + \frac{3}{2}) \ln(n+1) - (n+1) - \ln(n+1)!$
 $- (n + \frac{1}{2}) \ln n + n + \ln n!$

$$= (n + \frac{3}{2}) \ln(n+1) - (n + \frac{1}{2}) \ln n - \ln(n+1) - 1$$

$$= (n + \frac{1}{2}) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1$$

$$= -1 + (n + \frac{1}{2}) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$

$$= -\frac{1}{4n^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{12} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow S_{n+1} - S_n \sim \frac{1}{12} \frac{1}{n^2}$$

b) Puisque $S_{n+1} - S_n \sim \frac{1}{12} \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ cv et d'après le critère de comparaison
 Alors la série $\sum_{n \geq 0} S_{n+1} - S_n$ cv, d'où

la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ cv.

On pose $d = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + \frac{1}{2}) \ln n - n - \ln n!$

$$= \ln \left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} \right)$$

comme la fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \sqrt{n} e^{-n}}{n!} = e^d \neq 0$

$$\Leftrightarrow |n^n \sqrt{n} e^{-n} \sim e^d \cdot n!|$$

4) D'après la question précédente.

$$n^{2n} \cdot n e^{-2n} \sim e^{2d} (n!)^2$$

et $(2n)^{2n} \sqrt{2n} e^{-2n} \sim e^{2d} (2n)!$

Alors $\frac{(2n)! e^d}{(n!)^2 e^{2d}} \sim \frac{(2n)^{2n} \sqrt{2n} e^{-2n}}{n^{2n} n e^{-n}}$

or. $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{2^n}{\sqrt{\pi n}}$

D'où $e^{-d} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{2^{2n} n^{\frac{2}{n}} \sqrt{2} \sqrt{n} e^{-n}}{n^{2n} e^{-n}}$

$$e^{-\lambda} = \sqrt{2\pi}.$$

$$\Leftrightarrow -\lambda = \frac{1}{2} \ln \sqrt{2\pi}.$$

d'après 3.c) on déduit

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

5) a) D'après 3.a)

$$S_{n+1} - S_n \sim \frac{1}{2ne} \Rightarrow S_n - S_{n-1} \sim \frac{1}{2(n-1)e} \sim \frac{1}{2n}.$$

puisque, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ cv. et à termes positifs

Alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (S_k - S_{k-1}) \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k}.$

$$\begin{aligned} \text{or } \sum_{k=n+1}^{+\infty} (S_k - S_{k-1}) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^p (S_k - S_{k-1}) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} S_p - S_n \\ &= \lambda - S_n \end{aligned}$$

D'autre part:

$$\frac{1}{ke} \sim \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

D'où

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{ke} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{p} \right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{p} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{ke} \sim \frac{1}{n}.$$

On en déduit $\lambda - S_n \sim \frac{1}{2n}.$

b) D'après la question précédente.

$$\lambda - S_n \sim \frac{1}{2n}.$$

$$\Leftrightarrow -\ln \sqrt{2\pi} - \ln \frac{n^{1+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} \sim \frac{1}{2n}$$

$$\Leftrightarrow -\ln \sqrt{2\pi} - \ln \frac{n^{1+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} \sim \frac{1}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{n!}{n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n}} = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{n!}{n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n}} &= e^{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Alors $n! = n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Exercice 13

1) $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ C.F. positive et décroissante

$$\downarrow \quad \forall n-1 \leq t \leq n \Rightarrow f(n) \leq f(t) \leq f(n-1) \\ \Rightarrow f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt \leq f(n-1) \quad (f \text{ est } \downarrow)$$

$$\Rightarrow \textcircled{*} \quad 0 \leq \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \leq f(n-1) - f(n)$$

$$2) \text{ On a. } \sum_{k=1}^n f(k-1) - f(k) = f(0) - f(n)$$

comme $f(n) \geq 0$, alors

$$\sum_{k=1}^n f(k-1) - f(k) \leq f(0) \quad \left\{ \Rightarrow \right. \\ \text{et puisque } f(k-1) - f(k) \geq 0$$

la suite des sommes partielles est majorée.

$\Rightarrow$ la série $\sum_{n \geq 1} (f(n-1) - f(n))$ cv.

On déduit d'après (*) que la série

$\sum_{n \geq 1} w_n$ converge.

$$3) \text{ On a } \forall n \geq 1, \quad w_k = \int_{k-1}^k f(t) dt - f(k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n w_k = \int_0^n f(t) dt - \sum_{k=0}^n f(k)$$

Puisque la série $\sum_{n \geq 1} w_n$ cv, alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n w_k$ existe et fini

Ainsi la suite $\left(\int_0^n f(t) dt \right)_{n \geq 0}$ cv $\Leftrightarrow$ la " $\left(\sum_{k=0}^n f(k) \right)_{n \geq 0}$ cv.

$\Leftrightarrow$ la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ cv.

Dans le cas de convergence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n w_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^n f(t) dt - \sum_{k=1}^n f(k) \right)$$

$$\Leftrightarrow \left| \sum_{k=1}^n w_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(t) dt - \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \right|$$

II) $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

$$1) \text{ On a } \int_{n-1}^n f'(t) (t - (n+1)) dt$$

Ipp

$$\left[f(t) (t - (n+1)) \right]_{n-1}^n - \int_{n-1}^n f(t) dt$$

$$= f(n) - \int_{n-1}^n f(t) dt = -w_n$$

$$2) \text{ D'après 1). } |w_n| = \left| \int_{n-1}^n f'(t) (t - (n+1)) dt \right|$$

$$\leq \int_{n-1}^n |f'(t)| dt \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n |w_k| \leq \int_0^n |f'(t)| dt$$

Puisque la suite $\left(\int_0^n |f'(t)| dt \right)_{n \geq 0}$ cv et elle est croissante, alors elle est majorée

la suite $(\sum_{k=1}^n |w_k|)$ est majorée
 comme elle est à termes positifs alors
 la série $\sum_{n \geq 1} |w_n|$ cv.

Exercice 15

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \text{ et } b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

1) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ cv d'après T.S.A

$$\sum_{n \geq 1} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ div}$$

2) La série $\sum_{n \geq 1} C_n$ est la série produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 1} a_n$ par elle-même.

$$\Rightarrow C_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{n-k}$$

$$= (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)}$$

$$\frac{1}{x(n-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{n-x}$$

$$x F(x) / x=0 = \frac{1}{n} = a$$

$$(n-x) F(x) / x=n = -\frac{1}{n} = b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(n-x)} = \frac{1}{n} \frac{1}{x} + \frac{1}{n} \frac{1}{n-x}$$

on déduit

$$C_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} \right) \xrightarrow{p=n-k}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{p=n-1}^1 \frac{1}{p} \right)$$

$$C_n = \frac{2(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow |C_n| = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

4) soit $k \geq 2$
 on a

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$$

$$\forall n \geq 3; \int_2^n \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \int_1^{n-1} \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \ln n - \ln 2 + 1 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \ln(n-1) + 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\ln 2 + 1}{\ln n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}{\ln n} \leq \frac{\ln(n-1)}{\ln n} + \frac{1}{\ln n}$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sim \ln n$$

Puisque $|C_n| = \frac{e}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

Alors $|C_n| \sim \frac{e \ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |C_n| = 0$

2) On a $|C_n| - |C_{n+1}| = \frac{e}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{e}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

$= \frac{e}{n(n+1)} \left((n+1) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$

$= \frac{e}{n(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - 1 \right)$

$= \frac{e}{n(n+1)} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \geq 0$

Alors la suite $(|C_n|)_{n \geq 1}$ est décroissante.

et Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} |C_n| = 0$

et $\sum_{n \geq 1} C_n$ est alterné, alors.

La série $\sum_{n \geq 1} C_n$ Converge.

II) a) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est cv, d'après T.S.A
mais n'est pas abs cv.

2) $d_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}}$

$= (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$

$\forall k \in \{1, \dots, n-1\} \quad 1 \leq n-k \leq n-1$

$\Rightarrow k(n-k) \leq (n-1)^2 < n^2$

$\Rightarrow \sqrt{k(n-k)} < \sqrt{n}$

Alors $|d_n| \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \rightarrow 1$

$\Rightarrow d_n \not\rightarrow 0$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} d_n$ diverge.