

Correction: Série II

Série numérique

Exercice 1

$$\begin{aligned}
 1) \quad U_n &= n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{2n}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^* \\
 &= n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} \\
 &= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}
 \end{aligned}$$

ou $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs et CV.
 ou $\left| \sum_{n \geq 1} U_n \right| < \infty$ CV.

$$2) \quad U_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n}, \quad n \geq 2.$$

$$|U_n| = \frac{1}{|n^2 + (-1)^n|} \sim \frac{1}{n^2}.$$

ou $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2}$ et à termes positifs et CV.

$\Rightarrow \sum_{n \geq 2} U_n$ est abs CV $\Rightarrow$ CV.

$$\begin{aligned}
 3) \quad U_n &= x \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \\
 &= x\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
 &= \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

$$U_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est CV, alors $\sum_{n \geq 1} U_n$ CV.

4) $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
 U_n &= (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{\pi e^x}{2n \sin\left(\frac{\pi}{2} e^x\right)}\right) \\
 &= (-1)^{n-1} \left(\frac{\pi e^x}{2n \sin\left(\frac{\pi}{2} e^x\right)} - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 e^{2x}}{4n^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} e^x\right)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\
 &= (-1)^{n-1} \frac{\pi e^x}{2n \sin\left(\frac{\pi}{2} e^x\right)} + \underbrace{(-1)^{n-1} \frac{\pi^2 e^{2x}}{4n^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} e^x\right)}}_{W_n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

La série $\sum_{n \geq 1} U_n$ est alternée et vérifie T.S.A. (pour x fixe)

$$|W_n| \sim \frac{\pi^2 e^{2x}}{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} e^x\right)} \cdot \frac{1}{n^2}$$

(4)

Puisque $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty$, d'où $\sum_{n \geq 1} u_n$ est abs CV $\Rightarrow$ CV. Alors $\sum u_n$ CV.

ou bien Appliquer T.S.A sur la série $\sum u_n$.

b) i). Soit $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
 $f''(x) = -\sin x \leq 0$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
 Alors f est concave.

1^{er} méthode.

On écrit $x = \frac{e}{\pi} x + (1 - \frac{e}{\pi} x) \cdot 0$, $\frac{e}{\pi} x \in [0, 1]$

f est concave, Alors.

$$f(x) = f\left(\frac{e}{\pi} x + \left(1 - \frac{e}{\pi} x\right) \cdot 0\right) \geq \frac{e}{\pi} x f\left(\frac{\pi}{e}\right) + \left(1 - \frac{e}{\pi} x\right) f(0)$$

$$\Rightarrow \sin x \geq \frac{e}{\pi} x \sin\left(\frac{\pi}{e}\right) + \left(1 - \frac{e}{\pi} x\right) \sin 0$$

$$\sin x \geq \frac{e}{\pi} x, \forall x \in [0, \frac{\pi}{e}].$$

2^{ème} méthode

Puisque f est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, alors la courbe de f est au dessus de la corde passant par les points $A(0, f(0))$ et $B(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ qui est une droite linéaire

de pente $\frac{e}{\pi}$.

$$\Rightarrow \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]: \sin x \geq \frac{e}{\pi} x.$$

ii) Puisque la série $\sum u_n$ vérifie T.S.A. Alors $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \leq \frac{\ln\left(1 + \frac{\pi e^x}{2(n+1) \sin(\frac{\pi}{e} e^x)}\right)}{2(n+1) \sin(\frac{\pi}{e} e^x)}$$

$$\forall x \geq 0, 0 \leq e^{-x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} e^{-x} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{D'après bi) } \sin\left(\frac{\pi}{2} e^{-x}\right) \geq \frac{e}{2} e^{-x}.$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{\pi e^{-x}}{2(n+1) \sin(\frac{\pi}{2} e^{-x})} \geq 1 + \frac{\pi}{2} \frac{1}{(n+1)}$$

$\ln$ est $\uparrow$, d'où.

$$|R_n(x)| \leq \ln\left(1 + \frac{\pi}{2(n+1)}\right), \forall x \geq 0$$

Exercice 2.

$$1.) u_n = \ln\left(\cos \frac{1}{2^n}\right).$$

$$\text{ma: } \sin \frac{1}{2^{n-1}} = \sin 2 \cdot \frac{1}{2^n} = 2 \sin \frac{1}{2^n} \cos \frac{1}{2^n}.$$

$$\Rightarrow \ln\left(\sin \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \ln 2 + \ln\left(\sin \frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(\cos \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\Rightarrow u_n = \ln\left(\sin \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \ln\left(\sin \frac{1}{2^n}\right) - \ln 2.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k &= u_0 + \sum_{k=1}^n \ln\left(\sin \frac{1}{2^{k-1}}\right) - \ln\left(\sin \frac{1}{2^k}\right) - n \ln 2 \\ &= u_0 + \ln(\sin 1) - \ln\left(\sin \frac{1}{2^n}\right) - n \ln 2. \end{aligned}$$

$$= \ln(\cos 1 \cdot \sin 1) - \ln\left(\sin \frac{1}{2^n} \cdot e^n\right)$$

$$\text{or } \sin \frac{1}{2^n} \sim \frac{1}{2^n} \Rightarrow e^n \sin \frac{1}{2^n} \sim 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\Rightarrow \ln\left(\sin \frac{1}{2^n} \cdot e^n\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Ainsi } \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\cos 1 \cdot \sin 1) = \ln\left(\frac{1}{2} \sin 2\right)$$

Ceci montre que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ cv et

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ln\left(\frac{\sin 2}{2}\right) \right|$$

$$\begin{aligned} 2) \quad u_n &= \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2) \\ &= \ln n + a \ln n + a \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + b \ln n + b \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \\ &= (1+a+b) \ln n + a \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + b \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \\ &= (1+a+b) \ln n + a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + b\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (1+a+b) \ln n + \frac{2b+a}{n} - \left(\frac{b}{n} + \frac{a}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{La série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ cvssi } \begin{cases} 1+a+b=0 \\ 2b+a=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b=-1 \Rightarrow b=1 \\ a=-2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-2 \end{cases}$$

b) Pour $a=-2$ et $b=1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n (\ln k - 2 \ln(k+1) + \ln(k+2)) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln k - \ln(k+1) + \sum_{k=1}^n \ln(k+2) - \ln(k+1) \end{aligned}$$

$$= -\ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln 2$$

$$= \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln 2$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\ln 2 \right|$$

$$3) \text{ soit } u_n = n x^n$$

$$\forall x \neq 0; \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n+1}{n} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x| < 1$$

D'après d'Alembert, la série $\sum_{n \geq 0} n x^n$ est abscon
Alors elle est cv.

La série est aussi cv pour $x=0$.

$$\text{Soit } S_N(x) = \sum_{n=0}^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

$$\forall x \in]-1, 1[$$

S_N est dérivable sur $]-1, 1[$

$$S'_N(x) = \sum_{n=1}^N n x^{n-1} = \frac{-(N+1)x^N(1-x) + (1-x^N)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{-(N+1)x^N}{(1-x)^2} + \frac{1-x^{N+1}}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow x \cdot S'_N(x) = \sum_{n=1}^N n x^n = \frac{-(N+1)x^{N+1}}{(1-x)^2} + \frac{x(1-x^{N+1})}{(1-x)^2}$$

$N \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

③

Exercice 3

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$$

1) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; $n-x \neq 0$ et $n+x \neq 0$.

De plus:

$$\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{2x}{n^2 - x^2} \sim \frac{2x}{n^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{2x}{n^2}$ CV, alors la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$ CV. D'où:

$f(x)$ existe, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow f$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; $x+1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

$$f(x+1) = -\frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1-x} - \frac{1}{n+1+x} \right)$$

$$f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1-x} - \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+1+x} + \frac{1}{n+x} \right)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1-x} - \frac{1}{n-x} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1+x} \right) \quad (\text{Séries CV})$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} \right) = 0$$

3) $\forall x \in]-1, 1[$; $0 < x^2 < 1$.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$; $(2n+1)^2 \neq x^2$.

De plus, $\forall x \in]-1, 1[$;

$$\frac{2x}{(2n+1)^2 - x^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ \sim \frac{2x}{4n^2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{2x}{(2n+1)^2 - x^2} \text{ CV.}$$

$\Rightarrow g$ est bien définie sur $]-1, 1[$.

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = -\frac{2}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n - \frac{x+1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{x+1}{2}}$$

$$= -\frac{2}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\frac{2n-1-x}{2}} - \frac{1}{\frac{2n+1+x}{2}}$$

$$= -\frac{2}{x+1} + \lim_{N \rightarrow +\infty} 2 \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1-x} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1+x} \right)$$

$$= -\frac{2}{x+1} + \lim_{N \rightarrow +\infty} 2 \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2n+1-x} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1+x} \right)$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} 2 \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2n+1-x} - \frac{1}{2N+1+x} \right) - \frac{1}{2N+1+x}$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1-x} - \frac{1}{2n+1+x} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2 - x^2} = 2g(x)$$

Exercice 4

1) T.S. A la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ CV.

2) $p > n+1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^p \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{k=n+1}^p (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} dt \\ &= - \int_0^1 \sum_{k=n+1}^p (-t)^{k-1} dt \\ &= - \int_0^1 (-t)^n \left(\frac{1 - (-t)^{p-n}}{1+t} \right) dt \\ &= (-1)^{n+1} \left(\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt - (-1)^{p-n} \int_0^1 \frac{t^{p-n}}{1+t} dt \right) \end{aligned}$$

$$3) \text{ On a } \left| (-1)^{p-n} \int_0^1 \frac{t^{p-n}}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 t^{p-n} dt \leq \frac{1}{p+1-n}$$

$$\text{D'où } \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^p \frac{(-1)^k}{k} = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

4) par T.S.P.

$$R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

$u = \frac{1}{1+t} \quad u' = -\frac{1}{(1+t)^2}$
 $v = t^{n+1} \quad v' = (n+1)t^n$

$$R_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t} \Big|_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt \right)$$

$$= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt \right)$$

$$4) R_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})} \right) + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt$$

$$O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt \right| \leq \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} dt$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\leq \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{Ainsi } R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

5) Puisque la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ CV (T.S.A)
 et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CV
 5) $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} R_n$ CV

Exercice 5 "Transformation d'Abel"

1) $p \in \mathbb{N}^+$;

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p u_k v_k &= u_0 v_0 + \sum_{k=1}^p (s_k - s_{k-1}) v_k \\ &= u_0 v_0 + \sum_{k=1}^p s_k v_k - \sum_{k=1}^p s_{k-1} v_k \\ &= u_0 v_0 + \sum_{k=1}^p s_k v_k - \sum_{k=0}^{p-1} s_k v_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} (v_k - v_{k+1}) s_k + s_p v_p \end{aligned}$$

2) On a $|s_p v_p| \leq \pi \cdot v_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$

$\Rightarrow \lim_{p \rightarrow +\infty} s_p v_p = 0$

D'autre part: $|(v_k - v_{k+1}) s_k| \leq \pi |v_k - v_{k+1}|$
 $\leq \pi (v_k - v_{k+1})$
 $(v_k) \text{ est } \downarrow$

Comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = 0 \Rightarrow$ la série $\sum_{k \geq 0} v_k - v_{k+1}$ $\text{abs CV} \Rightarrow \text{CV}$

$\Rightarrow$ la série $\sum_{k \geq 0} (v_k - v_{k+1}) s_k$ $\text{abs CV} \Rightarrow \text{CV}$

li $\sum_{k=0}^{p-1} (v_k - v_{k+1}) \exists$ dans $\mathbb{C}$

li $\sum_{k=0}^p u_k v_k \exists$ dans $\mathbb{C}$.
 Ainsi: $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p u_k v_k \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n v_n \text{ CV}$

3) $\alpha \in \mathbb{R}; \theta \in \mathbb{R}$

* Si $\alpha > 1$ $\left| \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha}$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est abs CV $\Rightarrow$ CV.

* Si $\alpha \leq 0$: $\left| \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ diverge.

* Si $0 < \alpha \leq 1$.

On pose $u_n = e^{in\theta}$ et $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

La suite (v_n) est $\downarrow$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

$S_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}}$ si $\theta \neq 2\pi$

$= \frac{e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}} (e^{-i(n+1)\frac{\theta}{2}} - e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})}$

$= e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin((n+1)\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$

$\Rightarrow |S_n| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{\theta}{2})|}; \forall n \in \mathbb{N}$

Alors d'après 2/ la série $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{in\alpha}}{n^\alpha}$ CV

• Pour $0 < \alpha \leq 1$ et $\theta \in \theta \neq 2\pi$.

$\frac{e^{in\alpha}}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\alpha}}{n^\alpha}$ diverge.

$$4) R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \cdot v_k \\ = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^p u_k \cdot v_k$$

or pour $p > n+1$.

$$\sum_{k=n+1}^p u_k \cdot v_k = \sum_{k=n+1}^p (S_k - S_{k-1}) v_k \\ = \sum_{k=n+1}^p S_k v_k - \sum_{k=n+1}^p S_{k-1} v_k \\ = \sum_{k=n+1}^p S_k v_k - \sum_{k=n}^{p-1} S_k v_{k+1} \\ = -S_n v_{n+1} + S_p v_p + \sum_{k=n+1}^{p-1} S_k (v_k - v_{k+1})$$

$p \rightarrow +\infty$

$$S_p v_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 \\ \sum_{k=n+1}^{p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} S_k (v_k - v_{k+1})$$

$\rightarrow$ m raisonnement que e/.

Ainsi:

$$R_n = -S_n v_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} S_k (v_k - v_{k+1}) \\ \Rightarrow |R_n| \leq \pi \cdot |v_{n+1}| + \pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} |v_k - v_{k+1}| \\ \leq \pi |v_{n+1}| + \pi \cdot v_{n+1} \\ \Rightarrow |R_n| \leq 2\pi \cdot v_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice 6

1) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann, elle est cvssi $x > 1$.

$D_a = \{x > 0; \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^x} \text{ est abs cv}\}$

a) soit $\sigma \in D_a \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^\sigma}$ est abs cv.
soit $x \in [\sigma, +\infty[; \Rightarrow n^x \geq n^\sigma; \quad \forall x \geq \sigma$.

$$0 \leq \left| \frac{a_n}{n^x} \right| \leq \frac{|a_n|}{n^\sigma}$$

or $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^\sigma}$ est abs cv, alors $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^x}$ est abs cv

D'où $[\sigma, +\infty[\subset D_a$.

b) Supposons que D_a est non vide, alors

$\exists \sigma \in D_a \Rightarrow [\sigma, +\infty[\subset D_a \Rightarrow D_a$ est non majorée

$\forall \sigma \in D_a \Rightarrow [\sigma, +\infty[\subset D_a$

Soit $\sigma_1, \sigma_2 \in D_a$ tq $\sigma_1 \leq \sigma_2$

D'après a) $[\sigma_1, +\infty[\subset D_a \Rightarrow [\sigma_1, \sigma_2] \subset D_a$

$\Rightarrow D_a$ est un intervalle de $\mathbb{R}$

3) a) Pour $a_n = \frac{1}{n^d}; d \in \mathbb{R}$

$D_a = \{x > 0; \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{d+x}} \text{ est abs cv}\}$
 $\Leftrightarrow d+x > 1 \Leftrightarrow x > 1-d$

$D_a =]1-d, +\infty[$

b) $a_n = n!$

$D_a = \{x > 0; \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^x} \text{ est abs cv}\}$

(7)

$$\text{soit } U_n = \frac{n!}{n^x}$$

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^x} \cdot \frac{n^x}{n!} = (n+1) \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^x \rightarrow +\infty$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}; \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^x}$ diverge abs.

$$\Rightarrow D_a = \emptyset.$$

4.) $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ abs cv; $\forall z \in \mathbb{C}; |z| < R$.

a.) Puisque $R > 1 \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}$ tel que $1 < r < R$
Comme $r < R$; alors $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ abs cv.

b.) Soit $x > 0$;

$$\frac{a_n}{n^x} = a_n r^n \cdot \frac{1}{n^x r^n}$$

$$\text{or } r > 1 \text{ et } x > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x r^n} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{n^x} = o(a_n r^n)$$

$$\text{Comme } \sum_{n \geq 0} a_n r^n \text{ est abs cv} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^x} \text{ est abs cv}$$

$$\Rightarrow]0, +\infty[\subset D_a.$$

5.) $R < 1$; $\exists r \in \mathbb{R}$ avec $r < 1$ tel que $a_n r^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

a) Soit $x > 0$;

$$a_n r^n = \frac{a_n}{n^x} n^x r^n$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x r^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{x \ln n} \cdot e^{n \ln r}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \left(\frac{\ln r}{n} + x \frac{\ln n}{n} \right)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{D'où } a_n r^n = o\left(\frac{a_n}{n^x}\right).$$

b) Or $\forall x > 0$: $a_n r^n = o\left(\frac{a_n}{n^x}\right)$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel } \forall n \geq n_0; |a_n r^n| \leq \left| \frac{a_n}{n^x} \right|$$

$$\text{or } a_n r^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow \frac{a_n}{n^x} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n^x} \text{ diverge abs.}$$

$$\text{c) } \forall x > 0; \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n^x} \text{ div abs} \Rightarrow D_a = \emptyset$$

$$\text{d) } D_a \neq \emptyset, \quad \sigma_a = \inf D_a.$$

Soit $\alpha > \sigma_a$.

Par la caractérisation de la borne inf

$$\exists \beta \in D_a \text{ tel } \sigma_a < \beta < \alpha.$$

$$\left| \ln n \cdot \frac{a_n}{n^\alpha} \right| = \left| \frac{\ln n}{n^\alpha} \cdot n^\beta \cdot \frac{a_n}{n^\beta} \right|$$

$$= \frac{\ln n}{n^{\alpha-\beta}} \left| \frac{a_n}{n^\beta} \right|$$

$$\text{or } \alpha - \beta > 0 \Rightarrow \frac{\ln n}{n^{\alpha-\beta}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \ln n \cdot \frac{a_n}{n^\alpha} = o\left(\frac{a_n}{n^\beta}\right)$$

$$\text{or } \beta \in D_a \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n^\beta} \text{ est abs cv} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \ln n \frac{a_n}{n^\alpha} \text{ est abs cv}$$

Exercice 7

1) Puisque toute série abs cv est cv, alors

$$D_a \subset D_c.$$

D'où $\inf D_a \geq \inf D_c \Leftrightarrow \sigma_c \leq \sigma_a$.

2) Si $a_n \geq 0 \Rightarrow |a_n e^{-\lambda n x}| = a_n e^{-\lambda n x}$

$$\Rightarrow D_a = D_c \Rightarrow \sigma_c = \sigma_a.$$

3) a) Puisque $e^{-\ln n x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, alors

$$\sigma_c = \sigma_a.$$

D'autre part, on a $e^{-\ln n x} = \frac{1}{n^x}$.

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ cvssi $x > 1$.

$$\Rightarrow D_a = D_c =]1, +\infty[\Rightarrow \sigma_c = \sigma_a = 1.$$

$$b) D_a = \{x \in \mathbb{R}; \text{tg. } \sum_{n \geq 1} (-1)^n e^{-\ln n x}\} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

$$\Rightarrow D_a =]1, +\infty[$$

$$\Rightarrow \sigma_a = 1$$

$$D_c = \{x \in \mathbb{R} \text{ tg. } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x} \text{ cv}\} =]0, +\infty[\text{ (TS-A)}.$$

$$\Rightarrow \sigma_c = 0$$

$$d) \forall x \in \mathbb{R}; \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^x} \text{ cv.}$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n^x} = 0$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tg. } \forall n \geq n_0: \left| \frac{a_n}{n^x} \right| \leq 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \forall n \geq n_0, \left| \frac{a_n}{n^{x+1+\varepsilon}} \right| \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

$$\text{or } 1 + \varepsilon > 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \text{ cv.} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^{x+1+\varepsilon}} \text{ cv abs}$$

b) D'après a) $\forall x \in D_c; x+1+\varepsilon \in D_a, \forall \varepsilon > 0$

$$\Leftrightarrow D_c + 1 + \varepsilon \subset D_a.$$

$$\Rightarrow \inf(D_c + 1 + \varepsilon) \geq \inf D_a.$$

$$\Rightarrow \sigma_a \leq 1 + \varepsilon + \sigma_c, \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \sigma_a \leq 1 + \sigma_c$$

$$\text{or } \sigma_c \leq \sigma_a. \text{ D'où } \sigma_c \leq \sigma_a \leq 1 + \sigma_c$$

$$5) \text{ or a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = b \geq 0$$

$\Rightarrow$ Pour $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tg. $\forall n \geq n_0$.

$$\left| \frac{\ln n}{n} - b \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon \leq \frac{\ln n}{n} \leq b + \varepsilon$$

$$\Rightarrow a_n > \frac{\ln n}{b + \varepsilon} \cdot \frac{1}{n^x} \text{ cv.}$$

$$b) x \in \mathbb{R}; \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda n x} \text{ cv.}$$

$$|a_n e^{-\lambda n x}| = |a_n e^{-\lambda n (x + (1+\alpha)(b+\varepsilon))}|$$

$$= |a_n e^{-\lambda n x} \cdot e^{-\lambda n (1+\alpha)(b+\varepsilon)}|$$

$$\text{or } -\lambda n (b + \varepsilon) < -\ln n$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda n (b + \varepsilon) (1 + \alpha)} \leq e^{-\ln n (1 + \alpha)}$$

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}}$$

D'autre part: la série $\sum_{n \geq 0} a_n e^{-\lambda n x}$ CV
 $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ et } \forall n \geq n_0, |a_n e^{-\lambda n x}| < 1$

Ainsi $\forall n \geq n_0, |a_n e^{-\lambda n x}| \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}$
 $\alpha > 0 \Rightarrow 1+\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \text{ CV}$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n e^{-\lambda n x}$ abs CV

On déduit que $D_c + (1+\alpha)(b+\varepsilon) \subset D_a$.

$\Rightarrow \sigma_c + (1+\alpha)(b+\varepsilon) \geq \sigma_a, \forall \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0$
 $\sigma_c + b + \varepsilon + \alpha b + \alpha \varepsilon \geq \sigma_a$

$\Rightarrow \underline{\sigma_c + b \geq \sigma_a.}$