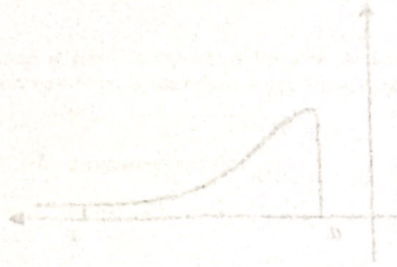


Chapitre



Intégration sur un intervalle quelconque

On sait intégrer sur les segments $[a, b]$ et on souhaite étendre la notion à tout intervalle et ainsi donner un sens entre autre à

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt \text{ et } \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

11.1 Intégration sur $[a, +\infty[$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

11.1.1 Convergence

Définition

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

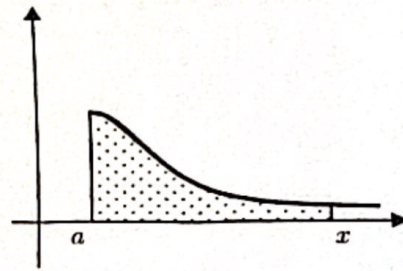
On dit que l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ converge si l'intégrale partielle $\int_a^x f(t) dt$ converge quand $x \rightarrow +\infty$.

On pose alors

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{\text{d\'ef } x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$$

Cette intégrale s'écrit aussi $\int_a^{+\infty} f$ s'il n'est pas utile de préciser une variable d'intégration (qui par ailleurs est muette) ou encore $\int_{[a, +\infty[} f(t) dt$.

Remarque L'intégrale converge si, et seulement si, l'aire hachurée converge quand $x \rightarrow +\infty$



Attention : Par essence, une intégrale impropre est une limite, pour la manipuler il faut préalablement en justifier l'existence.

Exemple Etude de $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$.

La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$

$$\int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

donc $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

Exemple Etude de $\int_0^{+\infty} 1 dt$.

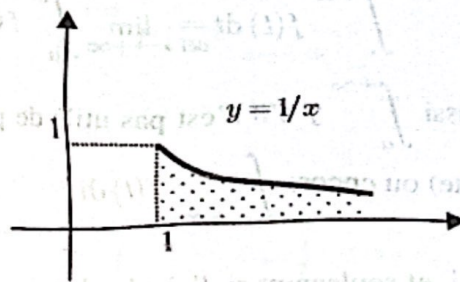
La fonction $t \mapsto 1$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

$$\int_0^x 1 dt = x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ donc } \int_0^{+\infty} 1 dt \text{ diverge.}$$

Exemple Etude de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$

La fonction $t \mapsto 1/t$ est définie et continue par morceaux sur $[1, +\infty[$

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ donc } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} \text{ diverge.}$$



Pour la fonction inverse, il y a trop d'espace entre la courbe et l'axe des abscisses pour que l'intégrale converge, la fonction inverse converge trop lentement vers 0 en $+\infty$.

11.1.2 Reste d'une intégrale convergente

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

Théorème

Pour tout $b \in [a, +\infty[$, on a équivalence entre :

- (i) $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge ;
- (ii) $\int_b^{+\infty} f(t) dt$ converge.

dém. :

On a

$$\int_a^x f = \int_a^b f + \int_b^x f$$

donc une intégrale partielle converge si, et seulement si, l'autre converge aussi.

□

Corollaire

On ne change pas la nature d'une intégrale sur $[a, +\infty[$ en modifiant les valeurs de la fonction intégrée sur $[a, c]$. La nature de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ ne dépend que du comportement de f au voisinage de $+\infty$.

Définition

Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge alors on peut introduire l'intégrale $\int_x^{+\infty} f(t) dt$ pour tout $x \in [a, +\infty[$.

La fonction ainsi définie s'appelle le reste de l'intégrale convergente.

Théorème

Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge alors pour tout $x \geq a$

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

De plus

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

dém. :

Soit $x \in [a, +\infty[$ fixé. On introduit $y \in [x, +\infty[$ et on a

$$\int_a^y f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^y f(t) dt$$

Quand $y \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

De plus

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

□

11.1.3 Cas des fonctions continues

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue de primitive F .

Théorème

On a équivalence entre :

- (i) $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge ;
- (ii) $F(x)$ converge quand $x \rightarrow +\infty$.

De plus, on a alors

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} [F(x)]_a^{+\infty}$$

Exemple Etude de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1}$

L'intégrale converge car $\arctan t$ est primitive de l'intégrande et converge en $+\infty$.

De plus

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Proposition

Si f est continue et si $\int_a^{+\infty} f$ converge alors

$$\frac{d}{dx} \left(\int_x^{+\infty} f \right) = -f(x)$$

dém. :

Introduisons une primitive F de f . Puisque l'intégrale converge, F admet une limite en $+\infty$ et on peut écrire

$$\int_x^{+\infty} f = \lim_{+\infty} F - F(x)$$

La fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ est alors de classe C^1 et

$$\frac{d}{dx} \left(\int_x^{+\infty} f \right) = -F'(x) = -f(x)$$

11.1.4.2 Positivité

Théorème

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.
 Si $\int_a^{+\infty} f$ converge et si $f \geq 0$ alors $\int_a^{+\infty} f \geq 0$

dém. :

En tant qu'intégrale bien ordonnée d'une fonction positive, pour tout $x \geq a$, on a

$$\int_a^x f \geq 0$$

A la limite quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient $\int_a^{+\infty} f \geq 0$.

□

Corollaire

Soit $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux.
 Si $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ convergent et si $f \leq g$ alors

$$\int_a^{+\infty} f \leq \int_a^{+\infty} g$$

dém. :

Avec convergence, on a

$$\int_a^{+\infty} g - \int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} g - f \geq 0$$

□

Théorème

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue.
 Si $f \geq 0$ et si $\int_a^{+\infty} f$ converge avec $\int_a^{+\infty} f = 0$ alors f est la fonction nulle.

dém. :

Introduisons F une primitive de f . La fonction F est croissante et puisque l'intégrale de f converge et vaut 0, on a $F(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F$. On en déduit que F est constante et donc $f = F' = 0$.

□

11.1.4.3 Conjugaison

Théorème

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux.
 Si $\int_a^{+\infty} f$ converge alors $\int_a^{+\infty} \bar{f}$ convergent et alors

$$\int_a^{+\infty} \bar{f} = \overline{\int_a^{+\infty} f}$$

dém. :

Par conjugaison de limites.

□

Corollaire

On a équivalence entre :

(i) $\int_a^{+\infty} f$ converge ;

(ii) $\int_a^{+\infty} \operatorname{Re} f$ et $\int_a^{+\infty} \operatorname{Im} f$ convergent.

De plus, on a alors

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} \operatorname{Re} f + i \int_a^{+\infty} \operatorname{Im} f$$

Exemple Calcul de $\int_0^{+\infty} \cos(\omega t) e^{-t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(\omega t) e^{-t} dt$.

Introduisons $\int_0^{+\infty} e^{(i\omega-1)t} dt$.

$$\int_0^x e^{i\omega t} e^{-t} dt = \int_0^x e^{(i\omega-1)t} dt = \left[\frac{e^{(i\omega-1)t}}{i\omega-1} \right]_0^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-i\omega} = \frac{1+i\omega}{1+\omega^2}$$

On en déduit

$$\int_0^{+\infty} \cos(\omega t) e^{-t} dt = \frac{1}{1+\omega^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(\omega t) e^{-t} dt = \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

11.2 Intégrabilité sur $[a, +\infty[$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

11.2.1 Cas des fonctions positives

Théorème

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Si f est positive on a équivalence entre :

(i) $\int_a^{+\infty} f$ converge ;

(ii) $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in [a, +\infty[, \int_a^x f(t) dt \leq M$.

dém. :

Puisque f est positive, pour tout $x \leq y \in [a, +\infty[$, on a

$$\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^y f(t) dt$$

L'intégrale partielle $\int_a^x f(t) dt$ définit donc une fonction croissante de x . Si celle-ci est majorée alors elle converge quand $x \rightarrow +\infty$ et la réciproque est vraie.

□

dém. :

Pour t assez grand, on a la comparaison

$$\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq 2g(t)$$

qui est décisive !

□

11.2.3 Intégrabilité

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

Définition

On dit que f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f|$ converge.

On dit aussi que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est absolument convergente. □

Remarque Si f est positive, il est équivalent de dire que f est intégrable sur $[a, +\infty[$ que de dire que son intégrale de f converge.

Exemple Intégrabilité de $t \mapsto \frac{\cos(t)}{1+t^2}$ sur $[0, +\infty[$.

On

$$0 \leq \left| \frac{\cos(t)}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

Or il y a convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ donc, par comparaison de fonctions positives, il y a convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\cos(t)}{1+t^2} \right| dt$.

Ainsi, la fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Théorème

Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$ alors $\int_a^{+\infty} f$ converge et $\left| \int_a^{+\infty} f \right| \leq \int_a^{+\infty} |f|$

dém. :

Cas f à valeurs positives

C'est immédiat compte tenu des résultats qui précède.

Cas f à valeurs réelles

On pose $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$.

Les fonctions $f^+, f^- : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont continues par morceaux et vérifient $f = f^+ - f^-$.

On a aussi $|f| = f^+ + f^-$ donc $0 \leq f^+, f^- \leq |f|$.

Par comparaison de fonctions positives, les intégrales $\int_a^{+\infty} f^+$ et $\int_a^{+\infty} f^-$ convergent puis, par opérations, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge aussi.

11.2. INTÉGRABILITÉ SUR $[A, +\infty[$

Cas f à valeurs complexes

On écrit $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$.

$\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues par morceaux.

Puisque $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \leq |f|$, on a, par comparaison de fonctions positives, les intégrales $\int_a^{+\infty} |\operatorname{Re} f|$ et $\int_a^{+\infty} |\operatorname{Im} f|$ convergent donc $\int_a^{+\infty} \operatorname{Re} f$ et $\int_a^{+\infty} \operatorname{Im} f$ convergent puis par opérations $\int_a^{+\infty} f$ converge aussi.

Enfin, pour tout $x \in [a, +\infty[$

$$\left| \int_a^x f \right| \leq \int_a^x |f|$$

donc à la limite quand $x \rightarrow +\infty$

$$\left| \int_a^{+\infty} f \right| \leq \int_a^{+\infty} |f|$$

□

Bilan : Pour une fonction réelle ou complexe

$$f \text{ intégrable} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge}$$

Pour une fonction positive, $f = |f|$ donc

$$f \text{ intégrable} \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge}$$

Remarque. Plus généralement, pour une fonction de signe constant, il y a aussi équivalence.

On peut encore approfondir : si f est de signe constant au voisinage de $+\infty$ alors l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$ équivaut à la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$.

Attention : Il se peut que $\int_a^{+\infty} f$ converge alors que $\int_a^{+\infty} |f|$ diverge.

Ce phénomène se rencontre lorsque la convergence de l'intégrale provient d'une compensation entre aires positive et négative.

Définition

Si $\int_a^{+\infty} f$ converge alors que $\int_a^{+\infty} |f|$ diverge, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est semi-convergente.

Exemple Les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ sont des intégrales semi-convergentes fameuses.

11.2.4 Intégrabilité par comparaison

11.2.4.1 Domination

Théorème

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ et $\varphi : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux.

Si

$$\forall t \in [a, +\infty[, |f(t)| \leq \varphi(t) \text{ avec } \varphi \text{ intégrable}$$

alors f est intégrable.

dém. :

L'intégrale $\int_a^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge et donc, par comparaison de fonctions positives, $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge.

Ainsi f est intégrable.

□

11.2.4.2 Comparaisons asymptotiques

Définition

Soit $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$.

On dit que f est dominée par g au voisinage de $+\infty$ si

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \exists A \in [a, +\infty[, \forall t \geq A, |f(t)| \leq M |g(t)|$$

On écrit alors

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$$

Remarque Il revient au même de dire qu'il est possible d'écrire au voisinage de $+\infty$

$$f(t) = b(t)g(t) \text{ avec } b \text{ une fonction bornée}$$

Définition

Soit $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0^+, \exists A \in [a, +\infty[, \forall t \geq A, |f(t)| \leq \varepsilon |g(t)|$$

On écrit alors

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$$

Remarque Il revient au même de dire qu'il est possible d'écrire au voisinage de $+\infty$

$$f(t) = \varepsilon(t)g(t) \text{ avec } \varepsilon(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

11.2. INTÉGRABILITÉ SUR $[A, +\infty[$

Définition

Soit $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de $+\infty$ si l'on peut écrire

$$f(t) = g(t) + o(g(t)) \quad t \rightarrow +\infty$$

On écrit alors

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$$

Remarque Il revient au même de dire qu'il est possible d'écrire au voisinage de $+\infty$

$$f(t) = u(t)g(t) \text{ avec } u(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$$

11.2.4.3 Intégrabilité par comparaison asymptotique

Théorème

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ et $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux.

Si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$ et si g est intégrable sur $[a, +\infty[$ alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$

dém. :

Il existe $A \in [a, +\infty[$ et $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall t \in [A, +\infty[, |f(t)| \leq M g(t)$$

En considérant $\varphi(t) = M g(t)$, on peut affirmer par domination qu'il y a convergence de $\int_A^{+\infty} |f|$ et

donc de $\int_a^{+\infty} |f|$ qui n'en diffère que d'une constante.

□

Corollaire

Si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$ et si g est intégrable sur $[a, +\infty[$ alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$

dém. :

$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$ alors $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$.

□

Corollaire

Si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$ alors l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$ équivaut à celle de g .

dém. :

si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$ alors $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$ et aussi $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(f(t))$ de sorte que l'intégrabilité d'une fonction entraîne l'intégrabilité de l'autre.

□

Attention : Ces énoncés sont faux en terme de convergence d'intégrale. Il est indispensable de s'exprimer en terme d'intégrabilité. Cependant, on peut énoncer le théorème d'équivalence suivant :

11.2.5 Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.**Théorème**

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si, et seulement si, } \alpha > 1$$

dém. :

La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est définie et continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.Pour $\alpha \leq 1$,

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

et donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge.Pour $\alpha > 1$,

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \left[-\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_1^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha-1}$$

et donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge.

□

Exemple $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1,00001}}$ convergent alors que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ divergent.**Corollaire**La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.

11.2.6 En pratique

Exemple Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1}$.La fonction $f : t \mapsto 1/(t^4 + 1)$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.Quand $t \rightarrow +\infty$, $f(t) \rightarrow 0$, on ne peut rien en conclure

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$$

Or $t \mapsto 1/t^4$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (car $4 > 1$) donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$, puis sur $[0, +\infty[$.Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1}$ est convergente.Exemple Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1} dt$.La fonction $f : t \mapsto (t+1)/(t^2+1)$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

11.2. INTÉGRABILITÉ SUR $[A, +\infty[$

On a

$$\frac{t+1}{t^2+1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge donc, par équivalence de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1} dt$ diverge.

On en déduit la divergence de $\int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1} dt$.

Exemple Nature de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Quand $t \rightarrow +\infty$, $f(t) \rightarrow 0$ mais ce n'est en rien décisif. Cependant $t^2 f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Or $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (car $2 > 1$) donc f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

Exemple Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+t^2} dt$.

La fonction $f : t \mapsto \cos(t)/(1+t^2)$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

On a

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\cos(t)}{t^2}$$

donc

$$t^{3/2} f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$$

Ainsi $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1/t^{3/2})$ et on peut conclure que f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt$ converge.

Exemple Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(t+1)} dt$.

La fonction $f : t \mapsto 1/\ln(t+1)$ est définie et continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.

On a

$$t f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

Il existe $A \in [1, +\infty[$ tel que pour $t \geq A$, $t f(t) \geq 1$ et donc $f(t) \geq 1/t$.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, donc par comparaison de fonctions positives (et moyennant un découpage des

intégrales en A) on peut conclure que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(t+1)} dt$ diverge.

Bilan : Pour $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux :

- Si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} C/t^\alpha$ (avec $C \neq 0$) quand $t \rightarrow +\infty$ alors

f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$;

- Si on détermine $\alpha > 1$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$;

- Si $t f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \ell \neq 0$ alors l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ diverge.

11.2.7 Intégrabilité et limite en $+\infty$

Théorème

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.
Si $f(t) \rightarrow \ell \neq 0$ alors l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ diverge.

dém. :

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Quitte à considérer $-f$, on peut supposer $\ell > 0$. Puisque f tend vers ℓ en $+\infty$, il existe $A \in [a, +\infty[$ vérifiant

$$\forall t \geq A, f(t) \geq \ell/2$$

et alors

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^A f(t) dt + \int_A^x f(t) dt$$

et donc

$$\int_a^x f(t) dt \geq \int_a^A f(t) dt + \frac{\ell}{2} (x - A) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Ainsi l'intégrale de $f(t) dt$ diverge (et donc f n'est pas intégrable)

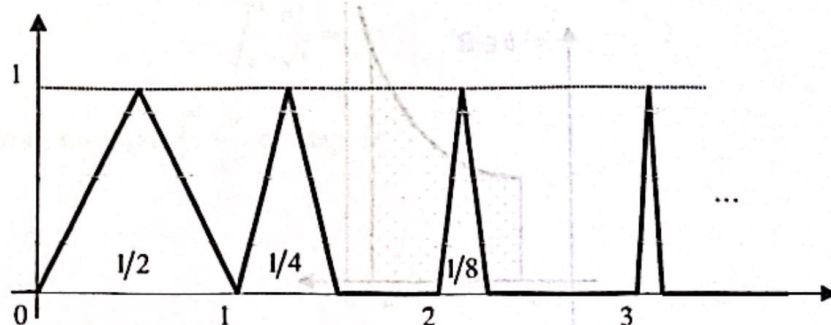
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

On raisonne par parties réelle ou imaginaire sachant que l'une des deux fonctions ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

□

Attention : Étonnamment, la condition $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ n'est pas une condition nécessaire d'intégrabilité.

Exemple Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue définie par



11.3. EXTENSION À UN INTERVALLE QUELCONQUE

f est intégrable mais n'est pas de limite nulle en $+\infty$.

En effet, la fonction f est positive et

$$\int_0^x f(t) dt \leq \int_0^{\lfloor x \rfloor + 1} f(t) dt = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor + 1} \frac{1}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Les intégrales partielles de f sont majorées et donc $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Aussi, f ne tend pas vers 0 en $+\infty$ car

$$f\left(n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

11.3 Extension à un intervalle quelconque

11.3.1 Intégration sur un intervalle semi ouvert

11.3.1.1 Intégration sur $[a, b[$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$.

Définition

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge si l'intégrale partielle $\int_a^x f(t) dt$ converge quand $x \rightarrow b^-$.

On pose alors

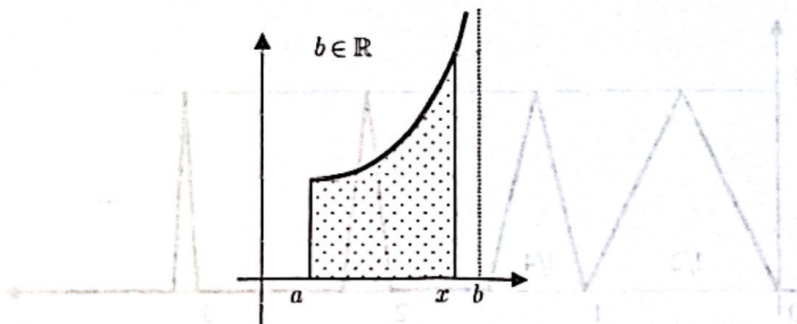
$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$$

encore notée $\int_{[a, b[} f(t) dt$.

On peut aussi introduire le reste d'intégrale convergente

$$\int_x^b f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow b^-} 0$$

Remarque L'intégrale converge si, et seulement si, l'aire hachurée converge quand $x \rightarrow b^-$



Exemple Etude de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Il s'agit d'une intégrale impropre en la borne 1 (i.e. d'une intégrale sur $[0, 1[$)

Puisque

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_0^x = \arcsin x \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi}{2}$$

Ainsi l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

On peut aussi procéder à un calcul plus immédiat assurant directement la convergence

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{[0,1]} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

11.3.1.2 Intégration sur $]a, b]$

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

Définition

Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

On dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ converge si l'intégrale partielle $\int_x^b f(t) dt$ converge quand $x \rightarrow a^+$.

On pose alors

$$\int_{]a,b]} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$$

et on peut introduire le reste d'intégrale convergente

$$\int_a^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a^+} 0$$

Exemple Etude de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$.

L'intégrale est impropre en la borne 0.

La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0, 1]$.

$$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 2$$

donc l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge et

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$$

Exemple Etude de $\int_0^1 \frac{dt}{t}$.

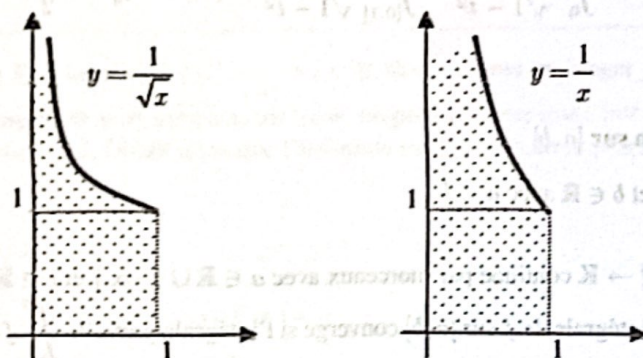
L'intégrale est impropre en la borne 0.

La fonction $t \mapsto 1/t$ est définie et continue par morceaux sur $]0, 1]$

$$\int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

donc l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge.

Pour la fonction inverse, il y a trop d'espace entre la courbe et l'axe des ordonnées pour que l'intégrale converge, cette fonction tend trop rapidement vers $+\infty$ en 0^+ .



11.3.1.3 Lien avec une éventuelle intégration sur $[a, b]$

La notation $\int_a^b f(t) dt$ peut être ambiguë dans le cas où f est définie et continue par morceaux sur $[a, b]$.

Cependant, il n'en est rien en vertu du résultat suivant.

Proposition

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux alors

$$\int_a^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow b^-} \int_a^b f(t) dt$$

où l'intégrale limite est comprise au sens de l'intégration sur un segment

dém. :

La fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, elle y est donc bornée par un certain $M \in \mathbb{R}^+$. On a alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^b f(t) dt \right| \leq \int_x^b |f(t)| dt$$

puis

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_x^b M dt = M(b-x) \xrightarrow{x \rightarrow b^-} 0$$

□

Définition

Lorsqu'une fonction f est définie et continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ on dit encore que son intégrale converge et l'on a

$$\int_{[a,b]} f(t) dt = \int_{[a,b[} f(t) dt = \int_{]a,b]} f(t) dt$$

Cette valeur commune est celle désignée par

$$\int_a^b f(t) dt$$

Remarque Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue. Si $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow b^-]{} \ell \in \mathbb{K}$ alors on peut prolonger f par continuité en b . La fonction ainsi obtenue étant alors continue sur $[a, b]$, on peut affirmer que l'intégrale sur $[a, b[$ converge et vaut l'intégrale sur $[a, b]$. On dit alors que l'intégrale est faussement impropre en b .

Exemple Etude de $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt$.

L'intégrale converge car faussement impropre en 0 puisque

$$\frac{\sin t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 1$$

11.3.2 Intégrale sur un intervalle ouvert**Définition**

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ converge si, pour $c \in]a, b[$, les intégrales de f sur $]a, c[$ et sur $]c, b[$ convergent. On pose alors

$$\int_{]a,b[} f \stackrel{\text{def}}{=} \int_{]a,c[} f + \int_{]c,b[} f$$

ou encore

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Remarque Ni la notion, ni la valeur de l'intégrale ne dépendent du choix de $c \in]a, b[$.

Remarque Si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux, la convergence et la valeur des intégrales

$\int_{]a,b[} f(t) dt$ et $\int_{[a,b]} f(t) dt$ sont les mêmes et encore une fois la notation $\int_a^b f(t) dt$ ne crée pas d'ambiguïté.

11.3. EXTENSION À UN INTERVALLE QUELCONQUE

Exemple Etude de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} =]-\infty, 0] \cup [0, +\infty[$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \text{ donc } \int_{[0, +\infty[} \frac{dt}{1+t^2} \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = -\arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi}{2} \text{ donc } \int_{]-\infty, 0]} \frac{dt}{1+t^2} \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{2}.$$

Par suite $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$$

Exemple Etude de $\int_{\mathbb{R}} t dt$.

La fonction $t \mapsto t$ est définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} =]-\infty, 0] \cup [0, +\infty[$

$$\int_0^x t dt = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ donc } \int_{[0, +\infty[} t dt \text{ diverge puis } \int_{\mathbb{R}} t dt \text{ aussi.}$$

Attention : Ici $\int_{-x}^x t dt = 0 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. On n'aurait pu vouloir poser $\int_{\mathbb{R}} t dt = 0$ mais cela n'est pas conforme à la définition.

En fait, on peut aussi remarquer $\int_{-x}^{x+1} t dt = x + \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et cette fois-ci $\int_{\mathbb{R}} t dt$ n'a plus de sens.

Pour cette raison, la convergence d'une l'intégrale sur $]a, b[$ s'étudie en la coupant en deux et non en étudiant conjointement les deux bornes.

11.3.3 Propriétés

Les propriétés calculatoires de linéarité, de positivité et de conjugaison présentées pour les intégrales sur $[a, +\infty[$ restent vraies pour une intégration sur un intervalle I quelconque et se démontrent par des procédés analogues.

Théorème

L'ensemble des fonctions continues par morceaux de I vers $\mathbb{K}$ dont l'intégrale converge est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K})$ et l'application $f \mapsto \int_I f(t) dt$ y définit une forme linéaire.

Théorème

Pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

Si $f \geq 0$ alors $\int_I f(t) dt \geq 0$.

Théorème

Pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Si $f \geq 0$ et si $\int_I f(t) dt = 0$ alors f est la fonction nulle.

11.3.4 Relation de Chasles

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est continue par morceaux telle que $\int_I f$ converge.

Pour $a < b \in \bar{\mathbb{R}}$ des éléments ou des extrémités de I , la théorie qui précède permet de donner un sens à

$$\int_a^b f(t) dt$$

en tant qu'intégrale convergente de f sur $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b[$ selon les possibilités. Si plusieurs interprétations sont possibles, celles-ci se correspondent. On pose encore

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt \text{ et } \int_a^a f(t) dt = 0$$

On peut alors énoncer le résultat suivant

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux telle que $\int_I f$ converge.

Pour tous a, b, c éléments ou extrémités de I , on a

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

avec convergence des intégrales engagées.

dém. :

Il suffit d'étudier tous les cas de figures possibles...

□

11.4 Intégrabilité sur un intervalle quelconque

11.4.1 Cas des fonctions positives

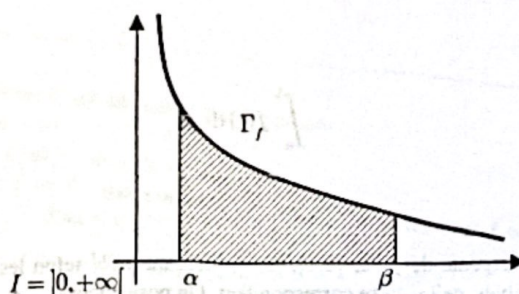
Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive.

On a équivalence entre :

(i) $\int_I f$ converge :

(ii) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall [\alpha, \beta] \subset I, \int_{\alpha}^{\beta} f \leq M$.



dém. :

Notons $a < b \in \bar{\mathbb{R}}$ les extrémités de I .

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que $\int_I f = \int_a^b f$ converge. Pour tout $[\alpha, \beta] \subset I$,

$$\int_a^b f = \int_a^{\alpha} f + \int_{\alpha}^{\beta} f + \int_{\beta}^b f \geq \int_{\alpha}^{\beta} f$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons (ii)

Cas $I = [a, b[$: l'intégrale partielle $\int_a^x f$ est croissante sur $[a, b[$ et majorée par M donc converge en b^- .

Ainsi $\int_{[a,b[} f$ converge.

Cas $I =]a, b]$: c'est analogue

Cas $I =]a, b[$: on découpe l'intervalle en $c \in]a, b[$.

□

Corollaire

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $0 \leq f \leq g$.

Si $\int_I g$ converge alors $\int_I f$ aussi.

Si $\int_I f$ diverge alors $\int_I g$ aussi.

11.4.2 Intégrabilité

Définition

On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux est intégrable sur I si l'intégrale $\int_I |f(t)| dt$ converge. On dit encore que l'intégrale $\int_I f(t) dt$ est absolument convergente.

Exemple Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux alors f est intégrable sur $[a, b]$ mais aussi sur $]a, b]$, $[b, a[$ et $]a, b[$.

Théorème

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux est intégrable alors l'intégrale $\int_I f$ converge et

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

dém. :

Cas f à valeurs positives : C'est immédiat par définition.

Cas f à valeurs réelles :

On pose $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$.

Les fonctions $f^+, f^- : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont continues par morceaux et vérifient $f = f^+ - f^-$.

On a aussi $|f| = f^+ + f^-$ donc $0 \leq f^+, f^- \leq |f|$.

Par comparaison de fonctions positives, les intégrales $\int_I f^+$ et $\int_I f^-$ convergent puis, par opérations, l'intégrale $\int_I f$ converge aussi.

Cas f à valeurs complexes

On écrit $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$.

$\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues par morceaux.

Puisque $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \leq |f|$, on a, par comparaison de fonctions positives, $\int_I |\operatorname{Re} f|$ et $\int_I |\operatorname{Im} f|$ convergent donc $\int_I \operatorname{Re} f$ et $\int_I \operatorname{Im} f$ convergent puis par opérations $\int_I f$ aussi.

Démontrons maintenant l'inégalité

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

Notons $a < b \in \mathbb{R}$ les extrémités de I .

Posons $c \in]a, b[$

Pour $x \in]a, c[$ et $y \in]c, b[$,

$$\left| \int_x^y f \right| \leq \int_x^y |f|$$

donne

$$\left| \int_x^c f + \int_c^y f \right| \leq \int_x^c |f| + \int_c^y |f|$$

A la limite quand $x \rightarrow a^+$

$$\left| \int_{]a, c]} f + \int_c^y f \right| \leq \int_{]a, c]} |f| + \int_c^y |f|$$

11.4. INTÉGRABILITÉ SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

puis quand $y \rightarrow b^-$, on obtient

$$\left| \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f \right| \leq \int_{[a,c]} |f| + \int_{[c,b]} |f|$$

ce qui donne

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

□

Bilan : Pour une fonction réelle ou complexe

$$f \text{ intégrable} \Rightarrow \int_I f \text{ converge}$$

Pour une fonction positive, $f = |f|$ donc

$$f \text{ intégrable} \Leftrightarrow \int_I f \text{ convergence}$$

Plus généralement, pour une fonction de signe constant, il y a équivalence.

Attention : Il se peut que $\int_I f$ converge et $\int_I |f|$ diverge. Dans ce cas, on dit que l'intégrale $\int_I f$ est semi-convergente.

11.4.3 Opérations

11.4.3.1 Sur les fonctions

Théorème

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues par morceaux et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Si f et g sont intégrables alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi.

dém. :

On a

$$|\lambda f + \mu g| \leq |\lambda| |f| + |\mu| |g|$$

Or $\int_I |f(t)| dt$ et $\int_I |g(t)| dt$ convergent donc, par opérations $\int_I |\lambda| |f(t)| + |\mu| |g(t)| dt$ converge.

Par comparaison de fonctions positives, $\int_I |\lambda f + \mu g|$ converge et donc $\lambda f + \mu g$ est intégrable.

□

Corollaire

L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$ formé des fonctions de I vers $\mathbb{K}$ continues par morceaux et intégrable et un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K})$ et l'application $f \mapsto \int_I f(t) dt$ définit une forme linéaire sur $L^1(I, \mathbb{K})$.

Remarque En revanche, on ne peut rien dire quant au produit de deux fonctions intégrables.

Par exemple $1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ alors que $\frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{\sqrt{t}}$ ne l'est pas.

Cependant, si f^2 et g^2 sont intégrables sur I alors le produit fg l'est aussi car

$$|fg| \leq \frac{1}{2} (|f|^2 + |g|^2)$$

11.4.3.2 Sur l'intervalle

Proposition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux et J un intervalle inclus dans I .
Si f est intégrable sur I alors f est intégrable sur J .

dém. :

Pour tout $[\alpha, \beta] \subset J$, on a

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt \leq \int_I |f(t)| dt = M$$

et donc $\int_J |f(t)| dt$ converge.

□

Proposition

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.
 f est intégrable sur $]a, b[$ si, et seulement si, f est intégrable sur $]a, c[$ et sur $[c, b[$.

dém. :

Car par définition

$$\int_{]a,b[} |f(t)| dt \text{ converge si, et seulement si, } \int_{]a,c[} |f(t)| dt \text{ et } \int_{[c,b[} |f(t)| dt \text{ convergent}$$

□

11.4.4 Intégrabilité par comparaison

11.4.4.1 Domination

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux.

Si

$$\forall t \in I, |f(t)| \leq \varphi(t) \text{ avec } \varphi \text{ intégrable}$$

alors f est intégrable.

dém. :

Par comparaison de fonctions positives, on obtient la convergence de $\int_I |f(t)| dt$.

□

Exemple Si I est un intervalle borné et si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux et bornée alors f est intégrable sur I .

11.4. INTÉGRABILITÉ SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

11.4.4.2 Comparaison asymptotique

Théorème

Soit $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ continues par morceaux avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Si $f(t) \underset{t \rightarrow b^-}{=} O(g(t))$ et si g est intégrable alors f est intégrable.

Corollaire

Si $f(t) \underset{t \rightarrow b^-}{=} o(g(t))$ avec g intégrable alors f l'est aussi.
Si $f(t) \underset{t \rightarrow b^-}{\sim} g(t)$ alors f est intégrable si, et seulement si, g l'est.

Remarque On peut énoncer des résultats analogues pour une étude d'intégrabilité sur $]a, b]$.

Exemple Soit $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux.

Si $f(t) \underset{t \rightarrow b^-}{\sim} g(t)$ alors les intégrales $\int_{[a, b[} f(t) dt$ et $\int_{[a, b[} g(t) dt$ ont même nature.

11.4.5 Intégrales de Riemann

11.4.5.1 Au voisinage de l'infini

Rappelons le résultat suivant.

Théorème

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si, et seulement si, } \alpha > 1$$

Par considération de symétrie, on a aussi

Théorème

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{|t|^\alpha} \text{ converge si, et seulement si, } \alpha > 1$$

11.4.5.2 Au voisinage d'une extrémité finie

Théorème

Soit $a < b$ deux réels et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \text{ converge si, et seulement si, } \alpha < 1$$

dém. :

Etude de $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$.

L'intégrale est impropre en a .

Cas $\alpha = 1$

$$\int_a^b \frac{dt}{t-a} = [\ln(t-a)]_a^b = \ln(b-a) - \ln(x-a) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} +\infty$$

et donc l'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{t-a}$ diverge.

Cas $\alpha \neq 1$

On a

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{(t-a)^{\alpha-1}} \right]_a^b \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

et donc l'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

□

Exemple $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$, $\int_0^1 \frac{dt}{t^{0.999}}$ convergent.

$\int_0^1 \frac{dt}{t}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ divergent.

Exemple Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 t^\lambda dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{-\lambda}}$ converge si, et seulement si, $\lambda > -1$.

Exemple L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge pour toute valeur du réel α .

Théorème

Soit $a < b$ deux réels et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \text{ converge si, et seulement si, } \alpha < 1$$

dém. :

C'est une configuration symétrique de la précédente.

□

Exemple $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge alors que $\int_0^1 \frac{dt}{1-t}$ diverge.

11.4.6 En pratique

11.4.6.1 Intégrabilité sur $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$

Les démarches d'intégrabilité déjà vu sur $[a, +\infty[$ se transposent à $]-\infty, a]$ en écrivant $|t|^\alpha$ au lieu de t^α lorsque l'exposant α est non entier.

Exemple Nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $]-\infty, +\infty[$.

On a $t^2 f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On a $t^2 f(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ donc f est intégrable sur $]-\infty, 0]$.

Finalement f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

11.4.6.2 Intégrabilité sur $]0, a]$

Exemple Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$. La fonction $f : t \mapsto t/(e^t - 1)$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

On a

$$\frac{t}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{t}{t} \rightarrow 1$$

La fonction est prolongeable par continuité et l'intégrale est faussement impropre en 0.

On a aussi

$$t^2 \times \frac{t}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^3 e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

et donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Finalement, f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Exemple Nature de $\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$.

La fonction $f : t \mapsto \cos(t)/\sqrt{t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0, 1]$.

On a $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} +\infty$ mais ce n'est en rien décisif.

Cependant

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} 1/\sqrt{t}$$

or $t \rightarrow 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ ($\alpha = 1/2 < 1$) donc f est intégrable sur $]0, 1]$ et $\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$ converge.

Exemple Nature de $\int_0^1 \ln t dt$.

La fonction $f : t \mapsto \ln t$ est définie et continue par morceaux sur $]0, 1]$.

$\sqrt{t} f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1/\sqrt{t})$.

Or $t \rightarrow 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ ($\alpha = 1/2 < 1$) donc f est intégrable sur $]0, 1]$ et $\int_0^1 \ln t dt$ converge.

Exemple Nature de $\int_0^1 \frac{\ln t}{t} dt$.

La fonction $f : t \mapsto \ln(t)/t$ est définie et continue par morceaux sur $]0, 1[$.

Quand $t \rightarrow 0^+$, $tf(t) \rightarrow -\infty$.

Il existe $a > 0$ tel que sur $]0, a]$, $f(t) \leq -1/t \leq 0$.

Par comparaison de fonctions négatives, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln t}{t} dt$ diverge.

Bilan : Pour $f :]0, a] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux :

- si $f(t) \rightarrow \ell \in \mathbb{C}$ alors f est intégrable sur $]0, a]$;
- si $f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} C/t^\alpha$ alors f est intégrable sur $]0, a]$ si, et seulement si, $\alpha < 1$;
- s'il existe $\alpha < 1$ vérifiant $t^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$ alors f est intégrable sur $]0, a]$;
- si $tf(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \ell \neq 0$ alors l'intégrale de f sur $]0, a]$ diverge.

11.4.6.3 Intégration $]a, b]$ ou $[a, b]$

On transpose les démarches ci-dessus. Il pourra être pertinent de se ramener en 0 par translation/symétrie de la variable pour mieux percevoir les ordres de grandeur.

Exemple Nature de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$.

La fonction $f : t \mapsto 1/\sqrt{1-t^3}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, 1[$.

Quand $t \rightarrow 1^-$, $t = 1 - h$ avec $h \rightarrow 0^+$.

$$f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{3h}} = \frac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{1-t}}$$

Or $t \mapsto 1/\sqrt{1-t}$ est intégrable sur $[0, 1]$ donc f aussi et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ converge.

Exemple Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}$.

La fonction $f : t \mapsto 1/(t^2-1)$ est définie et continue par morceaux par morceaux sur $]1, +\infty[$.

Quand $t \rightarrow 1^+$, $t = 1 + h$ avec $h \rightarrow 0^+$.

$$f(t) \sim \frac{1}{2h} = \frac{1}{2(t-1)}$$

Or $t \mapsto \frac{1}{t-1}$ n'est pas intégrable sur $]1, 2]$ donc f non plus.

A fortiori, f n'est pas intégrable sur $]1, +\infty[$.

Puisque f est de signe constant, on peut affirmer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}$ diverge.

Exemple Etude de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

11.5. CALCUL D'INTÉGRALES IMPROPRES

La fonction $f: t \mapsto (t-1)/\ln t$ est définie et continue par morceaux sur $]0, 0[=]0, 1/2] \cup]1/2, 1[$.

D'une part

$$f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

donc f est intégrable sur $]0, 1/2]$.

D'autre part

$$f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} 1$$

donc f est intégrable sur $]1/2, 1[$.

Finalement f est intégrable sur $]0, 1[$ et $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ converge.

Elle vaut $\ln 2$, mais c'est une longue histoire...

11.5 Calcul d'intégrales impropres

11.5.1 Par les intégrales partielles ou détermination de primitive

Pour justifier l'existence tout en calculant $\int_a^b f(t) dt = \int_{[a,b]} f(t) dt$ on peut

- calculer l'intégrale partielle $\int_a^x f(t) dt$ puis passer à la limite quand $x \rightarrow b^-$,
- introduire une primitive F de f (supposée continue) et exploiter $\int_{[a,b]} f(t) dt = [F]_a^{b^-}$.

Pour $\int_a^b f(t) dt = \int_{[a,b]} f(t) dt$ on peut

- calculer $\int_x^y f(t) dt$ puis passer à la limite quand $x \rightarrow a^+$ et $y \rightarrow b^-$,
- introduire une primitive F de f et exploiter $\int_{[a,b]} f(t) dt = [F]_{a^+}^{b^-}$.

Exemple Calcul de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)}$.

On peut justifier l'existence a priori de l'intégrale par l'argument d'intégrabilité

$$\frac{1}{t(t+1)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

Ce qui suit va aussi justifier l'existence tout en donnant la valeur

On calcule l'intégrale grâce à la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$

1ère méthode :

$$\int_1^x \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{dt}{t+1} = \ln x - \ln(x+1) + \ln 2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln 2$$

2ème méthode :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \left[\ln \frac{t}{t+1} \right]_1^{+\infty} = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$$

Le calcul direct par primitive est souvent plus rapide, mais permet moins de liberté qu'un calcul mené par les intégrales partielles.

11.5.2 Changement de variable

Théorème

Soit $\varphi :]a, b[\rightarrow]\alpha, \beta[$ une bijection de classe C^1 croissante et $f :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On a équivalence entre :

(i) $\int_{\alpha}^{\beta} f(u) du$ converge ;

(ii) $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ converge.

De plus, si tel est le cas

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(u) du$$

dém. :

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons la convergence de $\int_{\alpha}^{\beta} f(u) du$.

Soit $c \in]a, b[$ et $\gamma = \varphi(c)$. Pour $x \in [c, b[$, on a

$$\int_c^x f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\gamma}^{\varphi(x)} f(u) du$$

Puisque φ est une bijection croissante

$$\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow b^-} \beta$$

et donc

$$\int_c^x f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow b^-} \int_{\gamma}^{\beta} f(u) du$$

L'intégrale $\int_c^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ converge et vaut $\int_{\gamma}^{\beta} f(u) du$.

De même, l'intégrale $\int_a^c f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ converge et vaut $\int_{\alpha}^{\gamma} f(u) du$.

Finalement $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ converge et vaut $\int_{\alpha}^{\beta} f(u) du$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Même démarche en exploitant φ^{-1} .

□

Remarque Si $\varphi :]a, b[\rightarrow]\alpha, \beta[$ est une bijection de classe C^1 décroissante, on a un résultat analogue avec

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\beta}^{\alpha} f(u) du$$

Remarque En appliquant aussi ce résultat avec $|f|$ et en exploitant que φ' est de signe constant, on obtient aussi

$$u \mapsto f(\varphi(u)) \varphi'(u) \text{ intégrable sur }]a, b[\text{ si, et seulement si, } u \mapsto f(u) \text{ est intégrable sur }]\alpha, \beta[$$

Exemple Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$.

La fonction $f : t \mapsto e^{-\sqrt{t}}/\sqrt{t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Réalisons le changement de variable $u = \sqrt{t}$

La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ réalise une bijection de classe C^1 de $]0, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$

$$u = \sqrt{t}, t = u^2, dt = 2u du$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} 2e^{-u} du$$

Puisque l'intégrale obtenue par le changement de variable est connue convergente, il en est de même de l'intégrale initiale et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt = [-2e^{-u}]_0^{+\infty} = 2$$

11.5.3 Intégration par parties

Théorème

Soit I un intervalle d'extrémités $a < b \in \bar{\mathbb{R}}$ et $u, v : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 .

Si le produit uv converge en a^+ et b^- alors les intégrales

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt \text{ et } \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

ont même nature et en cas de convergence

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [uv]_{a^+}^{b^-} - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

dém. :

La fonction uv est de classe C^1 avec $(uv)' = u'v + uv'$.

Si uv converge en a^+ et b^- alors, il y a convergence de l'intégrale

$$\int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t) dt$$

et

$$\int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t) dt = [uv]_a^b$$

Si l'une des intégrales

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt \text{ ou } \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

alors, par opérations, l'autre aussi et

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt + \int_a^b u(t)v'(t) dt = [uv]_a^b$$

□

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}$. Calcul de $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

$f_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Quand $t \rightarrow +\infty$, $t^2 f_n(t) \rightarrow 0$ donc l'intégrale définissant I_n converge.

Posons $u'(t) = e^{-t}$ et $v(t) = t^n$ avec $u(t) = -e^{-t}$ et $v'(t) = nt^{n-1}$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 et uv possède des limites finies en 0 et $+\infty$.

Par intégration par parties

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = [-t^n e^{-t}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} nt^{n-1}(-e^{-t}) dt$$

avec convergence de l'intégrale introduite en second membre.

Ainsi $I_n = nI_{n-1}$ puis, sachant $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, on conclut

$$I_n = n!$$

Exemple Calcul de $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$.

$f : t \mapsto \ln(t)/(1+t)^2$ est définie et continue par morceaux sur $]0, 1]$.

$$\sqrt{t}f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{t} \ln(t) \rightarrow 0$$

donc f intégrable sur $]0, 1]$ et donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$ converge.

Posons $u'(t) = 1/(1+t)^2$ et $v(t) = \ln(t)$ avec $u(t) = -1/(1+t)$ et $v'(t) = 1/t$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 mais le produit uv ne possède pas une limite finie en 0.

On ne peut procéder à cette intégration par parties... Il y a cependant deux solutions

1ère méthode : on réalise l'intégration par parties sur les intégrales partielles

Pour $x \in]0, 1]$

$$\int_x^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt = \left[-\frac{\ln t}{1+t} \right]_x^1 + \int_x^1 \frac{dt}{t(1+t)}$$

et donc

$$\int_x^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt = \frac{\ln x}{1+x} + [\ln t - \ln(t+1)]_x^1$$

puis

$$\int_x^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt = -\frac{x \ln x}{1+x} + \ln(1+x) - \ln 2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\ln 2$$

donc

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt = -\ln 2$$

2ème méthode : on choisit $u(t) = t/(1+t)$ qui est aussi convenable et qui s'annule en 0, permet d'avoir le produit uv convergeant en 0

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt = \left[\frac{t \ln t}{1+t} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = -\ln 2$$

Exercice

11.6.1 Intégrales de Bertrand

Théorème

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

dém. :

La fonction $f : t \mapsto 1/t^\alpha (\ln t)^\beta$ est définie, continue et positive sur $[e, +\infty[$.

Cas $\alpha < 1$

$$tf(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{(\ln t)^\beta} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc pour t assez grand

$$f(t) \geq 1/t \geq 0$$

Or $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge donc par comparaison de fonctions positives, $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ diverge.

Cas $\alpha > 1$:

Sous cas inutile : $\beta > 0$

On a

$$t^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

donc f est intégrable sur $[e, +\infty[$ car $f(t) = o(1/t^\alpha)$ avec $\alpha > 1$.

Sous cas général :

On introduit $m \in]1, \alpha[$, on a

$$t^m f(t) = \frac{1}{t^{\alpha-m} (\ln t)^\beta} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

donc f est intégrable sur $[e, +\infty[$ car $f(t) = o(1/t^m)$ avec $m > 1$.

Cas $\alpha = 1$

$$\int_e^x \frac{dt}{t (\ln t)^\beta} \stackrel{u=\ln t}{=} \int_1^{\ln x} \frac{du}{u^\beta}$$

converge quand $x \rightarrow +\infty$ si, et seulement si, $\beta > 1$.

11.6.2 L'intégrale de Dirichlet Exercice

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

dém. :

La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Cette fonction se prolonge par continuité en 0 donc $\int_{]0,1]} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

Étudions $\int_{[1,+\infty[} \frac{\sin t}{t} dt$

Soit $A \geq 1$. Par intégration par parties

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt$$

Quand $A \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\cos A}{A} \rightarrow 0 \text{ et } \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

car cette dernière intégrale converge puisque

$$\frac{\cos t}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

□

Remarque Par une intégration par parties judicieuse, on montre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

En exploitant $1 - \cos t = 2 \sin^2(t/2)$ et le changement de variable $u = t/2$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du$$

Proposition

La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$

dém. :

Montrons que $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ diverge, le problème se posant en $+\infty$.

$$\int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \frac{\sin u}{u + (k-1)\pi} du$$

Or

$$\int_0^\pi \frac{\sin u}{u + (k-1)\pi} du \geq \int_0^\pi \frac{\sin u}{k\pi} du = \frac{2}{k\pi}$$

donc

$$\int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty$$

□

Remarque On peut montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ mais c'est une longue histoire...