

Def: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = L \in \mathbb{R}$
 Dans ce cas: $\int_a^{+\infty} f(t) dt = L$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} f(t) dt = 0$

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée

$f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ c.n
 et positive
 $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge

$0 \leq f \leq g$
 et $\int_a^{+\infty} g(t) dt < \infty$

$f \sim g$
 $\int_a^{+\infty} g(t) dt < \infty$

$f(t) = O(g(t))$
 $\int_a^{+\infty} g(t) dt < \infty$

$\int_a^{+\infty} f(t) dt = O(\int_a^{+\infty} g(t) dt)$

$\exists \alpha > 1$ tq $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$
 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t) dt < \infty$

$f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$
 avec $\alpha > 1$

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ n'est pas majorée

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = +\infty$

$f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ c.n
 et positive
 $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge

$0 \leq f \leq g$
 et $\int_a^{+\infty} g(t) dt = \infty$

$f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$
 $\alpha \leq 1$

$\exists \alpha \leq 1$ tq $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} b > 0$
 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t) dt = \infty$

$f \sim g$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt = \infty$

$\int_a^x f(t) dt \sim \int_a^x g(t) dt$

Si $f = O(g)$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt = \infty$
 alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \infty$

• Si f de signe qq. App la déf
 $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt < \infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t) dt < \infty$

• f est intégrable $\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$

Def: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^b f(t) dt = L < \infty$
 Dans ce cas $\int_0^b f(t) dt = L$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = 0$

$x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est
 décroissante et
 majorée

f est prolongé
 par continuité en 0

$f \sim g$
 $\int_0^x f(t) dt \sim \int_0^x g(t) dt$

$\int_0^x f(t) dt \sim \int_0^x g(t) dt$

$f:]0, b[\rightarrow \mathbb{R}$, C.17
 et positive.
 $\int_0^b f(t) dt$ CV

$f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$
 $\alpha < 1$

$\exists \alpha < 1$; $t^\alpha f(t) \rightarrow 0$
 $\Rightarrow f(t) = o(\frac{1}{t^\alpha})$

$f = o(g)$
 $\int_0^x g(t) dt$ CV, $g \gg 0$

$\int_0^x f(t) dt = o(\int_0^x g(t) dt)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^b f(t) dt = +\infty$

$x \mapsto \int_x^b f(t) dt$
 n'est pas
 majorée

$0 \leq g \leq f$
 $\int_0^b g(t) dt$ div

$f:]0, b[\rightarrow \mathbb{R}$, C.17
 et positive.
 $\int_0^b f(t) dt$ diverge

$f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$
 $\alpha \geq 1$

$\exists \alpha \geq 1$ tq
 $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{+}$
 $\Rightarrow \exists 0 < c < b$ tq $\forall t < c$
 $f(t) \geq \frac{1}{t^\alpha}$

$f \sim g$
 $\int_0^b f(t) dt$ div

$\int_0^b f(t) dt \sim \int_0^b g(t) dt$

$f = o(g)$
 $\int_0^b g(t) dt$ div.
 $\Rightarrow \int_0^b f(t) dt = (\int_0^b g(t) dt)$

même résultat, on a un problème en x_0
 • On remplace t par $(t - x_0)^\alpha$
 • On cherche $\sim$; 0 et 0 en x_0

f intégrable sur $I \iff \int_I |f(x)| dx < \infty$

Si f est intégrable sur I
alors $\int_I f(x) dx < \infty$

Si f positive
 f intégrable $\iff \int_I f(x) dx < \infty$

i) Si g est intégrable sur I
Alors f est " " "
ii) Si f n'est pas intégrable sur I
Alors g " " "

Si $f \sim_b g$ ($\text{sup } I = [a, b[$)
 f intégrable sur $[a, b[\iff g$ intégrable sur $[a, b[$

Si $f = \text{Re } f + i \text{Im } f$
 f intégrable sur $I \iff \text{Re}(f)$ et $\text{Im } f$ sont intégrables sur I

Si f et g sont intégrables sur I
Alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda f + g$ est intégrable sur I

Si f intégrable sur I et g non intégrable sur I
 $\Rightarrow f + g$ est non intégrable sur I

$f: I \rightarrow \mathbb{K} \subset \mathbb{R}$
 f est intégrable sur I

Si $f(t) = o_b(g(t))$
Si g intégrable sur $[a, b[$
Alors f est intégrable sur $[a, b[$

Si f est intégrable sur I
Alors $|\int_I f(x) dx| \leq \int_I |f(x)| dx$

Si $f \sim_b o(g)$
Si g est intégrable sur $[a, b[$
Alors $\int_a^b f(t) dt = o_b(\int_a^b g(t) dt)$

Rq Si f et g sont intégrables sur I
la fonction $f \cdot g$ n'est pas nécessairement intégrable
* Si f et g sont intégrables sur I
alors $f \cdot g$ est intégrable sur I

Si $\exists \alpha > 1$ tq $t^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$
 $\Rightarrow f(t) = o(\frac{1}{t^\alpha})$
 $\Rightarrow f$ intégrable au $v(+\infty)$
Si $\exists \alpha \leq 1$ tq $t^\alpha |f(t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$
 $\Rightarrow |f(t)| \geq \frac{1}{t^\alpha}$ pour t assez grand
 $\Rightarrow f$ n'est pas intégrable au $v(+\infty)$

au $v(0)$
Si $\exists \alpha < 1$ tq $t^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$
 $\Rightarrow f(t) = o(\frac{1}{t^\alpha})$
 $\Rightarrow f$ intégrable au $v(0)$
Si $\exists \alpha \geq 1$ tq $t^\alpha |f(t)| \xrightarrow{t \rightarrow 0} +\infty$
 $\Rightarrow |f(t)| \geq \frac{1}{t^\alpha}$ au $v(0)$
 $\Rightarrow f$ n'est pas intégrable au $v(0)$

Si $f \sim_b o(g)$
et g non intégrable
Alors $\int_a^x f(t) dt = o_b(\int_a^x g(t) dt)$