

Intégration sur un intervalle quelconque

Dans tout ce chapitre I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

* Définitions

* Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $a < \beta$.

Soit $f : [a, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux (C.M.).

$\int_a^b f(t)dt$ est C.V $\iff \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$ (finie dans le cas réel). Dans ce cas on :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt.$$

* Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C.M.

$\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ est C.V $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$ (finie dans le cas réel). Dans ce cas on :

$$\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t)dt.$$

* Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ C.M.

* $\int_a^b f(t)dt$ C.V $\iff c \in]a, b[\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent.

Dans le cas de convergence, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^c f(t)dt + \lim_{y \rightarrow b^-} \int_c^y f(t)dt.$$

* Intégrale de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$.

* Proposition

Soit $f :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

i) Si f est C.M et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ C.V, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} f(t)dt = 0.$$

ii) Si f est continue et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ C.V, alors la fonction

$H : x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)dt$ est dérivable sur $[a, +\infty[$ avec

$$H'(x) = -f(x), \forall x \in [a, +\infty[.$$

Proposition

- 1) Si $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors le reste $\int_x^b f(t)dt$ vérifie $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_x^b f(t)dt = 0$.
- 2) Si $\int_{[a,b]} f(t)dt$ converge, alors le reste $\int_a^x f(t)dt$ vérifie $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_a^x f(t)dt = 0$.

Propriétés

Soit $f, g : I \rightarrow IK$ C.M.

- 1) Si $\int_I f(t)dt$ C.V et $\int_I g(t)dt$ C.V, alors $\forall \lambda \in IK$
 $\int_I \lambda f(t) + g(t)dt$ C.V. Dans ce cas on a :

$$\int_I \lambda f(t) + g(t)dt = \lambda \int_I f(t)dt + \int_I g(t)dt.$$

- 2) Si $\int_I f(t)dt$ C.V et $\int_I g(t)dt$ D.V, alors $\int_I (f(t) + g(t))dt$ D.V.

- 3) Si $\int_I f(t)dt$ D.V et $\int_I g(t)dt$ D.V, on peut rien dire sur la nature de $\int_I f(t) + \int_I g(t)dt$.

- 4) Si $f \geq 0$ tel que $\int_I f(t)dt$ converge, alors $\int_I f(t)dt \geq 0$.

- 5) Si $f \leq g$, $\int_I f(t)dt$ et $\int_I g(t)dt$ convergent, alors $\int_I f(t)dt \leq \int_I g(t)dt$.

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Si $\begin{cases} f \text{ est continue, positive} \\ \int_I f(t)dt \text{ converge} \end{cases}$, alors $f = 0$.

Proposition

- 1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ C.M et positive, alors $\int_a^b f(t)dt$ C.V $\iff$ la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée.
- 2) Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C. M et positive, alors $\int_a^b f(t)dt$ C.V $\iff$ la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ est majorée.

Théorème de comparaison

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ C.M. sur I et positives, telles que :

$$0 \leq f \leq g.$$

- 1) Si l'intégrale $\int_I g(t)dt$ converge, alors $\int_I f(t)dt$ converge.
- 2) Si $\int_I f(t)dt$ diverge, alors $\int_I g(t)dt$ diverge aussi.

Intégrale absolument convergente

Soit $f : I \rightarrow IK$ une fonction C.M.

- * On dit que $\int_I f(t)dt$ est **absolument convergente** si $\int_I |f(t)|dt$ converge.

* La fonction f sera dite **intégrable** sur I si $\int_I f(t)dt$ est absolument convergente.

✱ Proposition

Soient $f : I \rightarrow IK$ C.M

Si $\int_I f(t)dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente et dans ce cas on a :

$$\left| \int_I f(t)dt \right| \leq \int_I |f(t)|dt.$$

✱ A Retenir

- Pour une fonction à valeurs réelles ou complexes

$$f \text{ intégrable sur } I \Rightarrow \int_I f(x)dx \text{ converge}$$

- Pour une fonction positive (garde un signe constant)

$$f \text{ intégrable sur } I \Leftrightarrow \int_I f(x)dx \text{ converge}$$

✱ Proposition

On note $L^1(I, IK) = \{f : I \rightarrow IK \text{ C.M intégrable sur } I\}$.

Alors $L^1(I, IK)$ est un IK -espace vectoriel.

(Si f et g sont intégrables sur I , alors $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda f + g$ est intégrable sur I .)

✱ Théorème

Soient $f, g : I \rightarrow IK$ deux fonctions C.M tels que

$$0 \leq |f| \leq |g|.$$

- Si g est intégrable sur I , alors f est intégrable sur I .
- Si f n'est pas intégrable sur I , alors g n'est pas intégrable sur I .

✱ Proposition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.

- f est intégrable sur I ssi $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont intégrables sur I . Dans le cas d'intégrabilité, on a :

$$\int_I f(x)dx = \int_I \operatorname{Re}(f)(x)dx + i \int_I \operatorname{Im}(f)(x)dx$$

Ceci nous permet de déduire que :

$$\operatorname{Re} \left(\int_I f(x)dx \right) = \int_I \operatorname{Re}(f(x))dx \text{ et } \operatorname{Im} \left(\int_I f(x)dx \right) = \int_I \operatorname{Im}(f(x))dx$$

- f est intégrable sur I ssi $\bar{f}$ est intégrable sur I et on a :

$$\int_I \bar{f}(x)dx = \overline{\int_I f(x)dx}$$

✱ Equivalence

- Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $a < b$ et $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ C.M, telles que $|f| \sim_b |g|$, alors

f est intégrable sur $[a, b]$ ssi g est intégrable sur $[a, b]$.

- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions C.M, telles que $|f| \sim_b |g|$, alors

f est intégrable sur $[a, b]$ ssi g est intégrable $[a, b]$.

✱ Négligabilité et Dominance

Soient $f : [a, b] \rightarrow IK$ une fonction continue par morceaux et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ C.M et positive.

- Si $\begin{cases} f =_b o(g) \\ \text{et} \\ g \text{ est intégrable sur } [a, b] \end{cases}$ alors f est intégrable sur $[a, b]$

ii) Si $\begin{cases} f =_o O(g) \\ \text{et} \\ g \text{ est intégrable sur } [a, b] \end{cases}$ alors f est intégrable sur $[a, b]$.

* Règle de Riemann au $v(+\infty)$.

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C.M.

- i) S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha |f(t)| = 0$, alors $f(t) = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ et par suite f est intégrable sur $[a, +\infty[$.
- ii) S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha |f(t)| = +\infty$, alors il existe $c > a$ tel que $\forall x > c, |f(t)| > \frac{1}{t^\alpha}$ et par suite f n'est pas intégrable.

* "Règle de Riemann au $v(0)$ "

Soit $f :]0, b] \rightarrow IK$ une fonction continue par morceaux.

- i) S'il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha |f(t)| = 0$, alors $|f(t)| = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ et par suite f est intégrable au $v(0)$.
- ii) S'il existe $\alpha \geq 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha |f(t)| = +\infty$, alors il existe un voisinage de 0 dans le quel $|f(t)| > \frac{1}{t^\alpha}$ et par suite f n'est pas intégrable au $v(0)$.

Calcul de l'intégrale généralisée.

Par primitive.

On utilise des primitives usuelles puis on passe à la limite.

* Changement de variable

Soient $[a, b]$ et $[\alpha, \beta]$ deux intervalles quelconques de $\mathbb{R}$

$\varphi :]a, b[\rightarrow]\alpha, \beta[$ une bijection strictement croissante de classe C^1 et $f :]\alpha, \beta[\rightarrow IK$ C.M., alors

Dans ce cas on :

$$\int_a^b f(t) dt \text{ converge} \iff \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du \text{ converge.}$$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du \quad (t = \varphi(u)).$$

Remarque :

- 1) Si $\varphi :]a, b[\rightarrow]\alpha, \beta[$ une bijection strictement décroissante de classe C^1 , alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_\beta^\alpha f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

- 2) Si f est paire ou bien impaire, alors

$$\int_{-\infty}^0 f(t) dt \text{ converge} \iff \int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ converge.}$$

Et par suite pour montrer que l'intégrale d'une fonction paire ou impaire est convergente sur $\mathbb{R}$, il suffit de la montrer sur $]0, +\infty[$.

* Intégration par partie

Soient $u, v : [a, b] \rightarrow IK$ deux fonctions de classe C^1

Si $\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x)$ existe dans IK , alors $\int_a^b u(x)v'(x) dx$ et

$\int_a^b u'(x)v(x) dx$ sont de même nature.

Dans le cas de convergence, on a

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = \lim_{x \rightarrow b^-} [u(t)v(t)]_a^x - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

✿ Comparaison série et intégrale

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ C.M positive et décroissante. On pose

$$w_n = \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

alors

i) La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

ii) f est intégrable sur $[0, +\infty[\iff \sum_{n \geq 0} f(n)$ converge.

Dans ce cas on a :

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n + \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$$

Intégration des relations de comparaison

✿ Cas des fonctions intégrables

Soient $a < b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

$f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ C.M et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ C.M et positive.

i) Si $\begin{cases} f = o_b(g) \\ \text{et} \\ g \text{ est intégrable sur } [a, b[\end{cases}$

f est intégrable sur $[a, b[$

alors

$$\int_a^b f(t)dt = o\left(\int_a^b g(t)dt\right)$$

ii) Si $\begin{cases} f = O_b(g) \\ \text{et} \\ g \text{ est intégrable sur } [a, b[\end{cases}$

f est intégrable sur $[a, b[$

alors

$$\int_a^b f(t)dt = O\left(\int_a^b g(t)dt\right).$$



iii) Si $\begin{cases} f \sim_b(g) \\ \text{et} \\ g \text{ est intégrable sur } [a, b[\end{cases}$

alors

$$\int_a^b f(t)dt \sim \left(\int_a^b g(t)dt\right).$$

Remarque .

Si les fonctions f et g sont définies sur $]a, b]$, alors les restes $\int_x^b f(t)dt$

et $\int_x^b g(t)dt$ seront remplacés par $\int_a^x f(t)dt$ et $\int_a^x g(t)dt$.

✿ Cas des fonctions non intégrables

Soient $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ C.M et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ C.M et positive.

i) Si $\begin{cases} f = o_b(g) \\ \text{et} \\ g \text{ est non intégrable sur } [a, b[\end{cases}$

$$\text{alors } \int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$$

ii) Si $\begin{cases} f = O_b(g) \\ \text{et} \\ g \text{ est non intégrable sur } [a, b[\end{cases}$

$$\text{alors } \int_a^x f(t)dt = O\left(\int_a^x g(t)dt\right).$$

iii) Si $\begin{cases} f \sim_b(g) \\ \text{et} \\ g \text{ est non intégrable sur } [a, b[\end{cases}$

alors f est non intégrable sur $[a, b[$ et $\int_a^x f(t)dt \sim \left(\int_a^x g(t)dt\right).$