

Problème 1

On pose

$$I(x, y) = \int_{-1}^1 (1+t)^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

1. Discuter suivant les valeurs de x et y , l'existence de $I(x, y)$.
2. Soit x et y deux réels, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$. On pose alors pour

$$x > 0 \text{ et } y > 0, \beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

3. En utilisant le changement de variable $t = \sin^2 \theta$, calculer $\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
4. Soit $x > 0$ et $y > 0$, montrer que $I(x, y) = 2^{x+y-1} \beta(x, y)$.
5. Soit $x > 0$ et $y > 0$.
 - a) Justifier que $\beta(x, y) = \beta(y, x)$
 - b) Montrer que $\beta(x+1, y) + \beta(x, y+1) = \beta(x, y)$.
 - c) Montrer que $y\beta(x+1, y) - x\beta(x, y+1) = \beta(x, y)$.

d)

$$\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \beta(x, y)$$

6. a) Montrer que $\beta(x+1, y+1) = \frac{4xy}{(x+y)(x+y+1)} \beta(x, y)$.
- b) En déduire l'expression de $\beta(n+1, n+1)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

II)

1. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\beta(x, n+1) = \frac{n}{x} \beta(x+1, n)$

2. a) Calculer $\beta(x, 2)$.

- b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x > 0$,

$$\beta(x, n+1) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

3. Soit $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2n+1} d\theta$.

- a) En utilisant la question 2.b), montrer que $u_n = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$.
- b) Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.