

Problème 2

Le but de ce problème est d'étudier les intégrales suivantes appelées intégrales de Futuna et de démontrer la formule de Stirling. Soit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(chx)^n}.$$

1. a) Montrer que F_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Montrer que $F_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. a) Calculer F_1 .
b) Calculer F_2 .
3. Montrer à l'aide d'une intégration par partie que, pour tout $n \geq 1$, $F_{n+2} = \frac{n}{n+1} F_n$.
(On rappelle que $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.)
4. Montrer que la suite $(F_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
5. a) On pose $u_n = nF_n F_{n+1}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est constante et calculer sa valeur.

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1$, puis déduire que $F_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

6. En utilisant la question 3), donner l'expression de F_{2n} et F_{2n+1} à l'aide de factorielle.

7. On admet dans la suite que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq (n + \frac{1}{2})(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \leq \frac{1}{12n^2}$$

Pour $n \geq 2$, on pose $v_n = \ln(n^n \sqrt{n} e^{-n}) - \ln(n!)$ et $w_n = \frac{1}{12(n-1)}$.

a) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes. On notera l leur limite commune.

b) Montrer que $2v_n - v_{2n} = \ln\left(\frac{F_{2n+1} \sqrt{2n}}{\pi}\right)$ et en déduire que $l = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

c) Prouver finalement la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

8. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$.