

Devoir à la maison

Exercice

Pour $x > 0$, on considère la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$

1) Montrer pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ converge, on notera

$g(x)$ sa somme c.à.d $\forall x > 0$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

2) Déterminer le signe de $g(x)$ pour $x > 0$.

3) Calculer $g(1)$.

4) a) Montrer que $\forall x > 0$, $g(x+1) - xg(x) = -\frac{1}{e}$

b) Calculer $g(2)$.

5) a) Vérifier que pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est absolument convergente et trouver une constante $M > 0$ telle que

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \right| \leq M, \quad \forall x > 0.$$

b) Dédire que $g(x) \sim_0 \frac{1}{x}$.

Problème

On considère les fonctions suivantes :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \text{ et } F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$$

$$\text{avec } g_n(x) = \frac{x}{n} - \log\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Partie I.

1) Montrer que pour $x \in]-1, +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} g_n(x)$ converge. En

dédire que F est définie sur $] -1, +\infty[$.

2) Justifier que ζ est définie sur $]1, +\infty[$ et montrer qu'elle est décroissante.

3) Montrer que la série $\sum_{k \geq 2} (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k}$ est convergente.

4) On pose $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$, $n \geq 1$.

a) Montrer que $\gamma_{n+1} - \gamma_n = g_n(1) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

b) Dédire que la suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ est convergente et que sa limite γ vaut $F(1)$.

4) a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$

b) Montrer que pour $x \in [0, 1[$,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t) dt$$

$$\text{avec } R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^k$$

c) Montrer que $\forall x \in [0, 1[$, $\left| \int_0^x R_n(t) dt \right| \leq \frac{1}{n+2}$ et déduire que

$$\forall x \in [0, 1[, \log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

d) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n}$.

5) Montrer que $\forall x \in [0, 1[\quad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{kn^k}$

On admet dans la suite que $\forall x \in [0, 1[, \quad F(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k} x^k$.

Partie II

1) Soit k un entier tel que $k \geq 2$, on pose $f_k(x) = \frac{E(x)}{x^{k+1}}$ avec $E(x)$ est la partie entière du réel x .

a) Montrer que f_k est intégrable sur $[1, +\infty[$.

b) Calculer $u_n(k) = \int_n^{n+1} f_k(x) dx, n \geq 1$.

c) Montrer que $\int_1^{+\infty} f_k(x) dx = \frac{\zeta(k)}{k}$.

(Ind : calculer $\int_1^N f_k(x) dx$ pour N un entier supérieur ou égale à 2).

2) Soit $v_k = \int_2^{+\infty} f_k(x) dx, k \geq 2$.

a) Montrer que $0 \leq v_k \leq \frac{1}{(k-1)2^{k-1}}$

déduire que la série $\sum_{k \geq 2} (-1)^k v_k$ est absolument convergente. On pose

$$V = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k v_k.$$

3) a) Montrer que $v_k = \frac{\zeta(k)}{k} + \frac{1}{k2^k} - \frac{1}{k}$.

b) En déduire que $V = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \log\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}$.