

DEVOIR ANALYSE N1 : durée 1h

Partie I : Soit α un réel strictement positif.

1. Pour $x \in]0, 2\pi[$, on pose $B_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin(kx)$.

(a) Montrer que $B_n(x) = \frac{\cos(\frac{1}{2}x) - \cos(\frac{2n+1}{2}x)}{2 \sin(\frac{1}{2}x)}$.

(b) En écrivant $\sin(kx) = B_k(x) - B_{k-1}(x)$, montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k^\alpha} = \frac{B_n(x)}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} B_k(x) \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right).$$

(c) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} B_n(x) \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)$ converge absolument.

(d) Dédurre que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ est convergente.

2. Établir que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans ce qui suit, on note

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}.$$

3. Calculer $S_1(\frac{\pi}{2})$. (On pourra remarquer que $\frac{1}{2k+1} = \int_0^1 t^{2k} dt$.)

4. Montrer que pour $\alpha > 1$, S_α est bornée sur $\mathbb{R}$.

T.S.V.P.

Partie II : Soit $u \in]-1, 1[$.

1. Déterminer, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - u} dt$.

2. Pour $\alpha > 0$, $t > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$R_N(t, u) = t^{\alpha-1} \left[\frac{u}{e^t - u} - \sum_{n=1}^{N-1} (ue^{-t})^n \right].$$

(a) Simplifier $R_N(t, u)$ et montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} R_N(t, u) dt = 0$.

(b) Pour $\alpha > 0$, on note $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

Justifier l'existence de $\Gamma(\alpha)$ et montrer que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{ut^{\alpha-1}}{e^t - u} dt = \Gamma(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n^\alpha}. \quad (*)$$

3. On admet que l'équation (*) reste valable pour $u = e^{ix}$, $0 < x < 2\pi$.

Montrer que l'on a alors :

$$S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - \cos x} dt.$$