Prof: N. Moalla

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière
comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé de deux problèmes indépendants entre eux.

Problème 3

Étude d'une fonction définie par une intégrale

1ère Partie

Convergence et calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

1.1. Convergence de l'intégrale en question

1.1.1. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

1.1.2. Montrer que, pour tout couple (ε, a) de réels tels que $0<\varepsilon<a$, on a

$$\int_\varepsilon^a \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1-\cos a}{a} - \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^a \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt.$$

1.1.3. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.

1.2. Calcul d'une intégrale auxiliaire

1.2.1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}$. Que vaut la somme $\dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$ si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$?

1.2.2. On prolonge la fonction $t \longmapsto \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}$ par continuité en 0. Montrer que $\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

1.3. On considère la fonction g définie sur le segment $[0,\pi]$ par : $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0\,; \\ \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} & \text{si } 0 < t \le \pi. \end{cases}$

1.3.1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

1.3.2. Montrer que $\int_0^\pi g(t)\sin\frac{2n+1}{2}t\,dt = \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi g'(t)\cos\frac{2n+1}{2}t\,dt$.

1.3.3. En déduire que $\int_0^\pi g(t)\sin\frac{2n+1}{2}t\,dt \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1.4. Calcul de l'intégrale en question

1.4.1. Montrer que $\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{t}\,dt \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

1.4.2. Conclure que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

Scanned with CamScanner

2$^{\text{ème}}$ Partie
Application à l'étude d'une fonction

2.1. Soit x un réel non nul.

2.1.1. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}$ est intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

2.1.2. Montrer que, pour tout réel $a > 0$,

$$\int_0^a \frac{\sin(xt)}{1+t}\,dt = \frac{1-\cos(xa)}{x(1+a)} + \frac{1}{x}\int_0^a \frac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}\,dt.$$

2.1.3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\,dt$ est convergente et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}\,dt.$$

Dans la suite du problème, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\,dt$, $x \neq 0$.

2.2. Montrer que la fonction f est impaire.

2.3. Étude de f au voisinage de $+\infty$

2.3.1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.

2.3.2. Vérifier que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,dt$ puis montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

2.4. Sens de variation de f

2.4.1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{(x+u)^2}\,du$.

2.4.2. En déduire que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$.

2.5. Étude de la régularité de f sur $]0,+\infty[$

2.5.1. On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{(1+t)^3}\,dt$.

dmettre
xxx Justifier la convergence de l'intégrale définissant h et montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ puis exprimer sa dérivée sous forme intégrale.

2.5.2. Justifier que, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, $|h(x) - h(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$.

2.5.3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{(1+t)^3}\,dt$ et en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

2.6. Étude de f à droite en 0

2.6.1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\dfrac{\pi}{2} - f(x) = x\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,du$.

2.6.2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,du\right| \leq 1 + \ln(1+x) - \ln x$.

2.6.3. En déduire la limite de f en 0^+ et justifier que, pour tout $x > 0$, $0 < f(x) < \dfrac{\pi}{2} = \sup\limits_{t>0} f(t)$.

2.6.4. Montrer que, pour tout $x > 0$, $0 < \dfrac{\frac{\pi}{2} - f(x)}{x} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,du$ puis en déduire que la fonction $x \longmapsto \frac{\frac{\pi}{2} - f(x)}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. On pourra justifier et utiliser le fait que, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$.

2.7. Donner une interprétation graphique du résultat de la question **2.6.4.** précédente et dessiner l'allure de la courbe représentative de f.

2.8. Montrer que la fonction $x \longmapsto f^2(x)$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Scanned with CamScanner