

Problème intégrale et série

Partie I : Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, lorsque cela a un sens, $H(x) = \int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1} dt$.

1. Démontrer que pour $s > -1$, l'intégrale $J_s = \int_0^1 t^s \ln(t) dt$ est convergente et donner sa valeur.
2. a) Montrer que pour tout $x > -1$, l'intégrale $H(x)$ est convergente.
 b) Montrer que H est monotone sur $] -1, +\infty[$.
 c) Montrer que $t \mapsto \frac{t \ln(t)}{1-t}$ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$.
 d) Dédire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 0$.
3. Démontrer que pour tout $x > -1$, $H(x) - H(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$.
4. Soit $x > -1$.
 a) Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(x+k)^2}$.
 b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)$.
 c) En déduire que $H(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$.
 d) On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $H(0)$ et $H(1)$.

Partie II : Notons f_n la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f_n(t) = (-1)^n \frac{t^n \ln(t)}{t-1}$.

1. a) Prouver que pour tout $x > -1$ et tout entier naturel k non nul,

$$\frac{1}{(x+k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{(x+t)^2} \leq \frac{1}{(x+k)^2}.$$
 b) Vérifier que pour tout $x > -1$, $H(x) - \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{x+1} \leq H(x)$.

c) Déduire un équivalent de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = H(n)$.

a)   tudier la convergence des séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$.

b) Pour $t \in]0, 1[$, on pose $f_n(t) = (-1)^n \frac{t^n (\ln(t))}{t-1}$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} f_n(t)$ est convergente et calculer sa somme.

c)i) On pose $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)$. Vérifier que la fonction R_n est intégrable sur $]0, 1[$ et montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 R_n(t) dt = 0.$$

ii) Déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt$

iii) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\ln(v)}{v^2 - 1} dv.$$

3) Donner la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ en fonction de $H(-\frac{1}{2})$.

Partie III : Pour tout couple d'entiers naturels (p, q) , on pose $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln(t))^q dt$.

1) Vérifier l'existence de $I_{p,q}$ et montrer que $\forall q \geq 1, I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$.

En déduire la valeur de $I_{p,q}$.

2)a) Justifier l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $B_n = \int_0^1 \frac{(\ln(t))^{n+1}}{t-1} dt$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $g_k(t) = t^k (\ln(t))^{n+1}, t \in]0, 1[$

Vérifier que pour $t \in]0, 1[$ la série $\sum_{n \geq 0} g_k(t)$ est convergente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k est intégrable sur $]0, 1[$ et

la fonction $R_k : t \mapsto \sum_{p=k+1}^{+\infty} t^p (\ln(t))^{n+1}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

b) Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 R_k(t) dt = 0$.

c) Donner B_n en fonction de $I_{p,q}$, puis déduire que $B_n = (-1)^n (n+1)! \zeta(n+2)$ avec $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}, x > 1$.