

Devoir à la main Analyse

Exercice 1

Soit $x > 0$.

1) On a $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$

Soit $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{n!(x+n)}{(n+1)!(x+n+1)}$$

$$= \frac{x+n}{x+n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'Alembert.

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n(x)$ converge.

Autrement:

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est alternée.

Pour $x > 0$ (fixe): la suite $(|u_n(x)|)_{n \geq 0}$

$= \left(\frac{1}{n!(x+n)} \right)_{n \geq 0}$ est décroissante.

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!(x+n)} = 0$

Alors d'après T.S.A, la série

$\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ converge.

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

2) Puisque la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ vérifie T.S.A, alors le signe de $g(x)$ est

le signe de son premier terme $u_0(x) = \frac{1}{x}$

Alors $g(x) > 0, \forall x > 0$

3) $g(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$= -(e^{-1} - 1)$$

$$\Rightarrow |g(1)| = 1 - \frac{1}{e}$$

On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

4) Soit $x > 0$:

$$g(x+1) - xg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+1+n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(x+n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)}$$

$$=$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{n+x}{n+x} \right) = 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \forall x > 0; \quad g(x+1) - xg(x) = -\frac{1}{e}$$

b) D'après a/ $g(2) - g(1) = -\frac{1}{e}$

$$\Rightarrow \underline{g(2)} = g(1) - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e}$$

c) D'après 1) la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ est abs. CV.

$$\cdot \forall x > 0; \quad \frac{1}{n!(n+x)} \leq \frac{1}{n!n}; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!n} = 1$$

(La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!n}$ est CV.)

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$$

$$\Rightarrow \frac{g(x)}{\frac{1}{x}} = 1 + x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$$

$$\text{or } \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow g(x) \sim \frac{1}{x}$$

Problème

Partie I

1) Soit $x > -1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est définie

$$g_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

$$= \frac{x}{n} - \left(\frac{x}{n} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{x^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{Or } \sum_{n \geq 1} \frac{x^2}{n^2} \text{ cv. et } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ cv.}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ cv}$$

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} g_n(x)$ converge, $\forall x > -1$

Ce qui montre $F(x)$ existe, $\forall x > -1$

$\Leftrightarrow F$ est définie sur $] -1, +\infty[$.

2) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann
d'où elle converge si $x > 1 \Leftrightarrow$

$$D_f =]1, +\infty[.$$

* Soient x et $y \in]1, +\infty[$ tq $x < y$.

$$\text{alors } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nx < ny \Rightarrow \frac{1}{nx} > \frac{1}{ny}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} > \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^y}$$

$$\Leftrightarrow f(x) > f(y) \Leftrightarrow f \text{ est } \searrow$$

On a : $\sum_{k \geq 2} (-1)^k \frac{\varepsilon(k)}{k}$ est une série alternée ($\frac{\varepsilon(k)}{k} > 0$)

$\forall k \geq 2; \left. \begin{aligned} \varepsilon(k+1) &\leq \varepsilon(k) \\ \frac{1}{k+1} &\leq \frac{1}{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$

$$\frac{\varepsilon(k+1)}{k+1} \leq \frac{\varepsilon(k)}{k}$$

$\Rightarrow$ la suite $\left(\frac{\varepsilon(k)}{k}\right)_{k \geq 2}$ est de croissante

$\forall k \geq 2, \varepsilon(k) \leq \varepsilon(2)$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\varepsilon(k)}{k} \leq \frac{\varepsilon(2)}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon(k)}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

D'après T.S.A. la série $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\varepsilon(k)}{k}$ Converge.

u) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$

a) $\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1)$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= g_n(1) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

(4)

b) On a la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ Comme $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$

D'où la série $\sum_{n \geq 1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ converge. Ce qui montre que la suite (γ_n) cv. vers une limite notée γ .

$$\sum_{n=1}^N (\gamma_{n+1} - \gamma_n) = \sum_{n=1}^N g_n(1) + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$\gamma_{N+1} - \gamma_1 = \sum_{n=1}^N g_n(1) + \frac{1}{N+1} - 1$$

$N \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(1) = F(1)$$

4) a) $x \in \mathbb{R}; |x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$

b) $\forall x \in [0, 1[$:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n dt =$$

$$= \int_0^x \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k dt + \int_0^x \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^k dt$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x + \int_0^x R_n(t) dt$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} + \int_0^x R_n(t) dt$$

c) Soit $x \in [0, 1[$;

$\forall t \in [0, x] \Rightarrow t \in [0, 1[$.

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^k = \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^x R_n(t) dt \right| \leq \int_0^x |R_n(t)| dt \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \int_0^x t^{n+1} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} dt$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^x R_n(t) dt \right| \leq \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x R_n(t) dt = 0$$

En passant à la limite dans la question b)
On obtient: $\forall x \in [0, 1[$.

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

d) Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} = -\ln\left(\frac{3}{2}\right) \right]$$

$$5) F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

$$\text{Or } x \in [0, 1[\Rightarrow \forall n \geq 1, 0 < \frac{x}{n} < 1$$

d'après u/c.

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k = +\frac{x}{n} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k \cdot n^k}$$

$$\begin{aligned} a) F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=2}^{N-1} (-1)^k \frac{x^k}{k n^k} + \sum_{k=N}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k n^k} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=2}^{N-1} (-1)^k \frac{x^k}{k n^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_N(x) \\ &= \sum_{k=2}^{N-1} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k n^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_N(x). \end{aligned}$$

b) Soit $x \in [0, 1[$;

$$c) |\varphi_N(x)| = \left| \sum_{k=N}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \right|$$

On pose: $U_k(x) = (-1)^k \frac{x^k}{k}$, $x \in [0, 1[$
La série $\sum U_k(x)$ est alternée.

Corr: $x^{k+1} \leq x^k$
 $\Rightarrow \frac{x^{k+1}}{k+1} \leq \frac{x^k}{k}$
 $\Rightarrow$ la suite $(|U_k(x)|)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est $\downarrow$

$|U_k(x)| \leq \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$

$\Rightarrow$ La série $\sum_{k \geq 1} U_k(x)$ vérifie T.S.A

$\Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \right| \leq |U_n(x)|$

$\Rightarrow |\varphi_N(x)| \leq \frac{x^N}{N}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1[$

$|\varphi_N(\frac{x}{n})| \leq \frac{(\frac{x}{n})^N}{N} \leq \frac{1}{Nn^N}$

ii) D'après i)

$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_N(\frac{x}{n}) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_N(\frac{x}{n})|$
 $\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Nn^N} = \frac{\zeta(N)}{N}$

$\leq$ donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\zeta(N)}{N} = 0$, alors
 $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_N(\frac{x}{n}) = 0$

7) On a

$$F(x) = \sum_{k=2}^{N-1} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k n^k} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_N(x)}_{=0}$$

 $N \rightarrow +\infty$, on obtient:

$$F(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k n^k}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \right)$$

 $\Rightarrow F(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k} x^k$

Partie II

i) $k \geq 2$; $f_k(x) = \frac{E(x)}{x^{k+1}}$

a) $\forall x \in [1, +\infty[$: $0 \leq E(x) \leq x$

$\Rightarrow 0 \leq f_k(x) \leq \frac{1}{x^k}$
 or $k \geq 2$, donc $x \mapsto \frac{1}{x^k}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Ce qui montre que f_k est intégrable sur $[1, +\infty[$.

b) $\forall x \in [n, n+1[$: $E(x) = n$, donc

$U_n(k) = \int_n^{n+1} f_k(x) dx = \int_n^{n+1} \frac{n}{x^{k+1}} dx$

$$= -\frac{n}{k} \left[\frac{1}{x^k} \right]_n^{n+1} = \frac{n}{k} \left(\frac{1}{n^k} - \frac{1}{(n+1)^k} \right)$$

c) On a: f_k est intégrable sur $[1, +\infty[$

$$\text{alors } \int_1^{+\infty} f_k(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N f_k(x) dx$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f_k(x) dx$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{n}{k} \left(\frac{1}{n^k} - \frac{1}{(n+1)^k} \right)$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n^{k-1}} - \frac{1}{(n+1)^{k-1}} \right)$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n^{k-1}} - \frac{1}{(n+1)^{k-1}} + \frac{1}{(n+1)^k} \right)$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{N^{k-1}} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^k} \right)$$

Alors: $\int_1^{+\infty} f_k(x) dx = \frac{1}{k} \left(1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \right)$
 $= \frac{\zeta(k)}{k}$

e) $U_k = \int_2^{+\infty} f_k(x) dx ; k \geq 2$

a) $0 \leq U_k \leq \int_2^{+\infty} \frac{x}{x^{k+1}} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx$
 $\leq -\frac{1}{k-1} \left[\frac{1}{x^{k-1}} \right]_2^{+\infty}$
 $\leq \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1}{k-1} = \frac{1}{(k-1)2^{k-1}}$
 $\Rightarrow 0 \leq U_k \leq \frac{1}{(k-1)2^{k-1}}$

soit $d_k = \frac{1}{(k-1)2^{k-1}}$

$$\left| \frac{d_{k+1}}{d_k} \right| = \frac{(k-1)2^{k-1}}{k2^k} = \frac{k-1}{2k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} < 1$$

D'Alembert

$\sum_{k \geq 2} d_k$ cv, alors $\sum_{k \geq 2} U_k$ cv
 ce qui montre que la série $\sum_{k \geq 2} (-1)^k U_k$ est abs cv.

3) a) $U_k = \int_2^{+\infty} f_k(x) dx = \int_1^{+\infty} f_k(x) dx - \int_1^2 f_k(x) dx$
 $= \frac{\zeta(k)}{k} - \int_1^2 \frac{E(x)}{x^{k+1}} dx$
 $= \frac{\zeta(k)}{k} - \int_1^2 \frac{1}{x^{k+1}} dx \quad (E(x) = 1, \forall x \in [1, 2])$

$$\frac{1}{x^k} = \frac{\xi(k)}{k} + \frac{1}{k} \left[\frac{1}{x^k} \right]_1$$

$$\frac{1}{x^k} = \frac{\xi(k)}{k} + \frac{1}{k} x^k - \frac{1}{k}$$

$$\begin{aligned} b) \quad V &= \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{\xi(k)}{k} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k x^k} \\ &\quad - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \quad (\text{Leibniz rule}) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{\xi(k)}{k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k x^k} + \frac{1}{2} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} - 1 \end{aligned}$$

$$V = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \ln \frac{x}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \frac{1}{2}$$