

$$1. I(x, y) = \int_{-1}^1 (1+t)^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

On a $t \mapsto (1+t)^{x-1} (1-t)^{y-1}$ est continue et positive sur $] -1, 1[$.

• au $v(1)$: On a $f \underset{1}{\sim} 2^{x-1} (1-t)^{y-1} \left(= 2^{x-1} \frac{1}{(1-t)^{1-y}} \right)$;
 $(1+t \underset{1}{\sim} 2)$

D'où f est intégrable au $v(1)$ ssi la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^{1-y}}$ est intégrable au $v(1)$ ssi $1-y < 1 \iff y > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

• au $v(-1)$: On a $f \underset{-1}{\sim} (1+t)^{x-1} 2^{y-1}$; $(1-t \underset{-1}{\sim} 2)$

D'où f est intégrable au $v(-1)$ ssi $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^{1-x}}$ est intégrable au $v(-1)$ ssi $1-x < 1 \iff x > 0, \forall y \in \mathbb{R}$

cl : f est intég sur $] -1, 1[$ ssi $x > 0$ et $y > 0$ ($\iff I(x, y)$ existe).

2. Soit $g : t \mapsto t^{x-1} (1-t)^{y-1}, t \in]0, 1[$. g est continue et positive sur $]0, 1[$.

• au $v(0)$: $g \underset{0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ qui est intég au $v(0)$ ssi $1-x < 1 \iff x > 0$.

• au $v(1)$: $g \underset{1}{\sim} (1-t)^{y-1} = \frac{1}{(1-t)^{1-y}}$ qui est intég au $v(1)$ ssi $1-y < 1 \iff y > 0$.

Ainsi g est intég sur $]0, 1[$ ssi $x > 0$ et $y < 0$.

$$3. \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt, t = \sin^2 \theta \rightarrow 1-t = \cos^2 \theta ;$$

$$t=0 \rightarrow \theta=0, t=1 \rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}; dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

$$\text{D'où } \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} d\theta = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$$

4.

$$I(x, y) = \int_{-1}^1 (1+t)^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad \begin{cases} U = \frac{1+t}{2} \rightarrow du = \frac{dt}{2} \\ t = -1 \rightarrow U = 0 \\ t = 1 \rightarrow U = 1 \\ 2U - 1 = t; 2(-U + 1) = 1-t \end{cases}$$

$$= \int_0^1 (2U)^{x-1} (2(1-U))^{y-1} 2 du$$

$$= \int_0^1 2^{x+y-1} U^{x-1} (1-U)^{y-1} du.$$

$$I(x, y) = 2^{x+y-1} \beta(x, y)$$

5. a)

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{y-1} (1-t)^{x-1} dt, \quad U = 1-t$$

$$= \int_0^1 (1-U)^{y-1} U^{x-1} du$$

$$= \beta(x, y)$$

b)

$$\begin{aligned}\beta(x+1, y) + \beta(x, y+1) &= \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} + t^{x-1} (1-t)^y dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} (t+1-t) dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\ &= \beta(x, y)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}y\beta(x+1, y) &= \int_0^1 y t^x (1-t)^{y-1} dt \begin{cases} \frac{I_{pp}}{U = t^x & V' = y(1-t)^{y-1} \\ U' = x t^{x-1} & V = (1-t)^y \end{cases} \\ &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ A \rightarrow 1}} [t^x (1-t)y]_{\epsilon}^A + x \int_{\epsilon}^A t^{x-1} (1-t)y dt \\ &= x \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt \\ &= x\beta(x, y+1)\end{aligned}$$

d) On a

$$\begin{cases} 1) \beta(x+1, y) + \beta(x, y+1) = \beta(x, y) \\ 2) y\beta(x+1, y) - x\beta(x, y+1) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}x \times 1) + 2) &\Rightarrow (x+y)\beta(x+1, y) = x\beta(x, y) \\ &\Rightarrow \beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y}\beta(x, y)\end{aligned}$$

6. a) On a

$$\begin{aligned}I(x+1, y+1) &= 2^{x+y+1} \beta(x+1, y+1) \text{ (d'après 4)} \\ &= 2^{x+y+1} \frac{x}{x+y+1} \beta(x, y+1) \\ &= 2^{x+y+1} \frac{x}{x+y+1} \beta(y+1, x) \text{ (d'après 5.a)} \\ &= 2^{x+y+1} \frac{x}{x+y+1} \frac{y}{x+y} \beta(x, y) \\ &= \frac{4xy}{x+y+1} \frac{2^{x+y-1}}{x+y} \beta(x, y) \\ &= \frac{4xy}{(x+y+1)(x+y)} I(x, y)\end{aligned}$$

$$I(n+1, n+1) = \frac{4n^2}{(2n+1)(2n)} I(n, n)$$

$$1. \beta(x, n+1) = \frac{n}{x} \beta(x+1, n) \text{ (d'après 5.b)}$$

2. a)

$$\begin{aligned}\beta(x, 2) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t) dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1} dt - \int_0^1 t^x dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\left[\frac{1}{x} t^x \right]_{\epsilon}^1 - \frac{1}{x+1} [t^{x+1}]_{\epsilon}^1 \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{x(x+1)}\end{aligned}$$

b) Par récurrence.

$$\text{Mq } \forall n \in \mathbb{N}^*, \beta(k, n+1) = \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

$$3. u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2n+1} d\theta$$