Correction devoir N°1 "2024"

Partie I

1) $x \in]0, 2\pi[$.

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}(e^{ikx})$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}(1-e^{inx})}{1-e^{ix}} \right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{i\frac{(x+nx)}{2}} \cdot (e^{-i\frac{nx}{2}} - e^{i\frac{nx}{2}})}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})} \right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)x} \frac{\sin n\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \right)$$

$$= \frac{\sin(n+1)\frac{x}{2} \; \sin(n\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}.$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

b) on a $B_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx \Rightarrow$

$\sin(kx) = B_k(x) - B_{k-1}(x)$.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k(x) - B_{k-1}(x)}{k^\alpha}.$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k(x)}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{k-1}(x)}{k^\alpha}.$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k(\alpha)}{k^\alpha} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k(x)}{(k+1)^\alpha}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} B_k(\alpha)\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) + \frac{B_n(\alpha)}{n^\alpha}. + \underset{0}{B_0(x)}$$

c) on a $|B_n(x)| \leq \frac{2}{2\sin\frac{x}{2}}$ (d'après a)

$$\Rightarrow \left| B_n(x)\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) \right| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \left| \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right|$$

$$\leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ $(\alpha > 0)$ $\Rightarrow$

$\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)$ CV $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} B_n(x)\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)$ est abs CV.

d) • $(B_n(x))_{n\geq 1}$ est une suite bornée.

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{B_n(x)}{n^\alpha} = 0$

• $\sum\limits_{n\geq 1} B_n(x)\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)$ est abs CV $\Rightarrow$ CV

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} B_k(x)\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$ ∃ et fin

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$ ∃ et finie.

$\Leftrightarrow \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ CV ; $\forall x \in]0, 2\pi[$.

2) • si $x \in]0, 2\pi[$. $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ CV, (d'apr

• si. $x = 2k\pi \Rightarrow \forall n \geq 1$, $\sin n 2k\pi = 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ CV.

• si $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $x - 2k\pi \in]0, 2$

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(n(x-2k\pi))}{n^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ CV.

3) $S_1(\frac{\pi}{2}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$

soit $H_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} \Rightarrow$

on a $\frac{1}{2k+1} = \int_0^1 t^{2k}\,dt \Rightarrow H_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k \, dt$

$= \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - (-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$

$H_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$

or $\left|(-1)^n\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\right| \leq \int_0^1 t^{2n+2}\,dt = \frac{1}{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

D'où $\lim_{n\to+\infty} H_n = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow S_1(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$.

4) Soit $\alpha>1$

$\forall x\in\mathbb{R}\ |S_\alpha(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha} = cte$ ($\alpha>1$, $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ cv)

$\Rightarrow S_\alpha$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Partie II

1) $t\mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{e^t-u}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et ⊕ ($\forall t\geq 0$; $e^t \geq 1 > u$)

Pb en $+\infty$. $\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-u} \sim \frac{t^{\alpha-1}}{e^t} = e^{-t}t^{\alpha-1}$

$t^2 e^{-t}t^{\alpha-1} = e^{-t}t^{\alpha+1} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \Rightarrow e^{-t}t^{\alpha-1} \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow t\mapsto\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-u}$ est intég sur $[1,+\infty[$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

Pb en 0

$\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-u} \underset{0}{\sim} -\frac{t^{\alpha-1}}{u} = -\frac{1}{u}\frac{1}{t^{1-\alpha}}$ qui est intég au V(0) $\Leftrightarrow 1-\alpha<1$

$\Leftrightarrow \alpha>0$

Ainsi $t\mapsto\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-u}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ ssi $\alpha>0$

2) a) $R_N(t,u) = t^{\alpha-1}\left[\frac{u}{e^t-u} - \sum_{n=1}^{N-1}(ue^{-t})^n\right]$

$= t^{\alpha-1}\left[\frac{u}{e^t-u} - \frac{ue^{-t}(1-(ue^{-t})}{1-ue^{-t}}\right.$

$= t^{\alpha-1}\frac{(ue^{-t})^{N+1}}{1-ue^{-t}}$

b) $\left|\int_0^{+\infty}R_N(t,u)\,dt\right| \leq \int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}u^{N+1}(e^{-t})^{N+1}}{1-ue^{-t}}\,dt$

$\leq \int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-u}u^{N+1}(e^{-t})^{N}\,dt$

$\leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0\ N\to+\infty \\ (|u|<1)}}{u^{N+1}}\cdot\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-u}\,dt}_{cte}$

$\Rightarrow \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}R_N(t,u)\,dt = 0$

b) soit $\alpha>0$, $t\mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

Pb en 0 $t^{\alpha-1}e^{-t}\underset{0}{\sim} t^{\alpha-1} = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$ qui est intég sur $]0,1]$ ($1-\alpha<1$)

Pb en $+\infty$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{2}\, t^{\alpha-1} e^{-t} = 0 \Rightarrow t^{\alpha-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^{2}}\right)$$

or $t \mapsto \frac{1}{t^{2}}$ est intég sur $[1,+\infty[$

$\Rightarrow t \mapsto t^{\alpha-1} e^{-t}$ " " "

Ainsi: $\forall \alpha>0$; $t \mapsto t^{\alpha-1} e^{-t}$ est intég sur $]0,+\infty[$

D'où l'existence de $\Gamma(\alpha)$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{u\, t^{\alpha-1}}{e^{t}-u}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{u e^{-t}\, t^{\alpha-1}}{1-u e^{-t}}\, dt$$

or $|u e^{-t}| \leqslant |u| < 1$; $\forall t>0$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-u e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (u e^{-t})^{n}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{u\, t^{\alpha-1}}{e^{t}-u}\, dt = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (u e^{-t})^{n+1}\, t^{\alpha-1}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{N-1} (u e^{-t})^{n} + R_N(t,u)\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} R_N(t,u)\, dt + \sum_{n=1}^{N-1} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} (u e^{-t})^{n}\, dt}_{\text{intég}}$$

Puisque $\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} R_N(t,u)\, dt = 0$, alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{u\, t^{\alpha-1}}{e^{t}-u}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} (u e^{-t})^{n}\, dt.$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-nt}\, dt \right) u^{n}$$

$(x = nt)$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \frac{dx}{n^{\alpha}}\, u^{n}$$

$$= \Gamma(\alpha) . \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{n}}{n^{\alpha}} .$$

3) La relation $(*)$ est valable pour $u = e^{ix}$ $\quad 0<x<2$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}\, t^{\alpha-1}}{e^{t}-e^{ix}}\, dt = \Gamma(\alpha) . \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^{\alpha}} .$$

$$\Rightarrow \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}} = \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}\, t^{\alpha-1}}{e^{t}-e^{ix}}\, dt \right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}\, t^{\alpha-1} (e^{t} - e^{-ix})}{(e^{t}-\cos x)^{2} + \sin^{2} x} \right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}\, e^{t} (e^{ix} - e^{-t})}{e^{t}+1-2\cos x\, e^{t}}\, dt \right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} (e^{ix} - e^{-t})}{\frac{e^{-t}+e^{t}}{2} - \cos x} \right) dt$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} (e^{ix} - e^{-t})}{\operatorname{ch} t - \cos x}\, dt \right)$$

$$= \frac{\sin x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x}\, dt$$

$$\Rightarrow S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x}\, dt$$