

Série : Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice 1 .

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

a) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$

c) $\int_2^{+\infty} \frac{2 - \cos x}{\ln x} dx$

e) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t} dt$

g) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + x + 1} dx$

i) $\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)(x^2+1)}$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan 2x - \arctan x}{x} dx,$

f) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \ln x dx$

h) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2 + 2t + 7} dt$

Exercice 2 .

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$.2. Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.3. Déduire la valeur de $u_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt, n \in \mathbb{N}$ Exercice 3 1. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ est convergente.2. On pose $J = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$. montrer avec un changement de variable que J s'exprime en fonction de I . En déduire la convergence de J .3. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x} dx$ est divergente.4. On pose $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos^2(x)}{x}$. vérifier que $f \sim g$ et cependant $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ ne sont pas de même nature. Expliquer

Exercice 4 "Calcul de l'intégrale de Gauss".

1. Montrer que, pour tout réel $x \in]-1, +\infty]$, $\ln(1+x) \leq x$.2. En déduire, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0, \sqrt{n}[$

$$\ln(1 - \frac{t^2}{n}) \leq -\frac{t^2}{n} \text{ et } \ln(1 + \frac{t^2}{n}) \leq \frac{t^2}{n}.$$

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt \leq \int_0^{+\infty} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

(a) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} u du$$

(b) Montrer
$$\int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u du$$

(c) En déduire que

$$\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u du \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} u du.$$

5. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

(a) Calculer I_0 et I_1 . Exprimer I_n en fonction de I_{n-2} pour $n \geq 2$.

(b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

(c) En déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

6. Déduire des questions 4 et 5 la valeur de l'intégrale suivante $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ appelée intégrale de Gauss.

Déduire les valeurs de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Exercice 5 .

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \text{ converge.}$$

On se donne deux réels $a > 0$ et $b > 0$.

1) a) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = \int_{bx}^{bx^2} \frac{f(u)}{u} du$$

b) En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ et que sa valeur est $f(0) \ln(\frac{b}{a})$.

2) Justifier que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ est convergente et donner sa valeur.

Exercice 6 .

1) Soit f une fonction à valeurs réelle intégrable sur $[0, +\infty[$. Montre que si la limite de $f(x)$ existe quand x tend vers $+\infty$, alors cette limite est nécessairement nulle.

2) Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ et croissante. On suppose que f et f'' sont intégrables sur $[0, +\infty[$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ et que f' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7 .

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x > 0$, on pose

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

2. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $g(x)$ pour $x > 0$.

3. Pour $0 < a < b$, montrer que

$$i) \int_a^b (g(t))^2 dt = 2 \int_a^b g(t) f(t) dt + a(g(a))^2 - b(g(b))^2$$

$$ii) \sqrt{\int_a^b (g(t))^2 dt} \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} (f(t))^2 dt} + \sqrt{a(g(a))^2 + \int_0^{+\infty} (f(t))^2 dt}.$$

4. Déduire que $\int_0^{+\infty} (g(t))^2 dt$ converge.

Exercice 8 .

1. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{R}$

$$I_n(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + t^2)^{n+1}}.$$

(a) Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ est convergente pour toute valeur de $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$.

(b) A l'aide du changement de variables $t = a \tan \theta$, montrer que $\forall (a, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$, $I_n(a) = \frac{1}{a^{2n+1}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(\theta) d\theta$

2. Soit pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $J_k = \int_{\pi/2}^{\pi/2} e^{ik\theta} d\theta$.

(a) Montrer que l'intégrale J_k est bien définie et que $J_0 = \pi$,
 $\forall k \in \mathbb{Z}^*$, $J_{2k} = 0$,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, J_{2k+1} = \frac{2(-1)^k}{2k+1}.$$

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n}(\theta) d\theta = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k J_{2n-2k}$.

(c)) En déduire que

$$\forall (a, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}, I_n(a) = \frac{(2n)! \pi}{4^n a^{2n+1} (n!)^2}$$

X Exercice 9 Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que F est bien définie sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x) \forall x > 0$.

3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow 0^+} xF(x) = 0$

4. Sans exprimer $F(x)$, justifier et calculer $\int_0^{+\infty} F(x) dx$.

Exercice 10 "Transformer de Laplace".

Pour toute fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$ on note $\hat{f}(s)$ l'intégrale suivante (qui peut être convergente ou bien divergente)

$$\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

1. Pour une fonction positive f , montrer que si l'intégrale $\hat{f}(s)$ converge pour un certain s , alors l'intégrale $\hat{f}(s')$ est convergente pour tout s' avec $s' \geq s$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que si $f(t) = O(e^{at})$ quand $t \rightarrow +\infty$, alors $\hat{f}(s)$ est convergente pour tout $s \in]a, +\infty[$.

3. (a) Montrer que si $f = c$ est une fonction constante, alors $\hat{f}(s)$ est convergente pour tout $s > 0$, puis donner l'expression de $\hat{f}(s)$, $\forall s > 0$.

(b) Montrer que si $f(t) = e^{at}$ pour un réel a , alors $\hat{f}(s)$ est convergente si et seulement si $s > a$, puis calculer sa valeur.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(t) = \frac{t^n}{n!}$.

Montrer que $\hat{f}_n(s)$ est convergente pour $s > 0$, puis que $\hat{f}_n(s) = \frac{1}{s^{n+1}}$, $\forall s > 0$.

4. On suppose maintenant que la fonction f est de classe C^∞ et que $f^{(n)}$ est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $s > 0$. Montrer que si l'intégrale $\hat{f}(s)$ est convergente, alors $\hat{f}'(s)$ converge aussi et que $\hat{f}'(s) = s\hat{f}(s) - f(0)$.

(b) Montrer que si l'intégrale $\hat{f}(s)$ est convergente, alors Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\widehat{f^{(n)}}(s)$ converge et

$$\widehat{f^{(n)}}(s) = s^n \hat{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0),$$

avec $f^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de f .

5. On s'intéresse dans cette question à la fonction $h(t) = \sin t$.

(a) Montrer que $\hat{h}(s)$ converge pour tout $s > 0$.

(b) Calculer $\hat{h}''(s)$ en fonction de $\hat{h}(s)$ et en déduire $\hat{h}(s)$.