

Série II : Intégration sur un intervalle qcq

Exercice 1 Etudier l'intégrabilité des fonctions suivantes :

- 1) $f(t) = e^{-t^2-itx}$ sur $\mathbb{R}$.
- 2) $f(t) = \frac{t^{s-1}}{1-e^{-t}} e^{-t}$ sur $]0, +\infty[$.
- 3) $f(t) = \frac{E(t)-t}{t^{s+1}}$ sur $[1, +\infty[$ avec $s > 0$.
- 4) $f(t) = \frac{\ln(t)}{x+t} e^{-t}$ sur $]0, 1]$ avec $x > 0$.
- 5) $f(t) = \frac{1}{1+tx^2}$ sur $[0, +\infty[$.
- 6) $f(t) = t^n e^{-(1-i)t}$ sur $[0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$.
- 7) $f(t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$ sur $]0, +\infty[$.
- 8) $f(t) = t^{2p}(1+\frac{t^2}{n})^{-n}$ sur $\mathbb{R}$, $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 2 1) Soient $a > 0$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , positive et décroissante telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une

fonction continue telle que la fonction $x \mapsto \int_a^x g(t)dt$ soit bornée.

Montrer que $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ converge.

2) Soit $\alpha > 0$, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ converge.

Exercice 3 Soient $a > 0$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et

strictement positive telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(f(x))}{\log(x)} = \alpha$, puis déduire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\lambda f(x) \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-\alpha\}.$$

2) Montrer que si $\alpha < -1$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$ et que

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt \sim_{+\infty} -\frac{xf(x)}{\alpha+1}.$$

3) Montrer que si $\alpha > -1$, alors f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$ et que

$$\int_a^x f(t)dt \sim_{+\infty} \frac{xf(x)}{\alpha+1}.$$

4) $\alpha = -1$ que peut-on dire sur l'intégrabilité de f .

Exercice 4 On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$

1) Déterminer D le domaine de définition de f

On admet que f est continue sur D

2) Donner une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$ pour $x \in D$

3) Déduire qu'au voisinage de $x = -1$.

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \log 2 + o(1)$$

Exercice 5 On désigne par f une fonction à valeurs complexes continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et on étudie la fonction F (dite transformée de Fourier définie

définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixt} f(t) dt.$$

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que F est bornée sur $\mathbb{R}$
3. On suppose dans cette question seulement que $f(t) = e^{-\pi t^2}$.

a) Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

on admet dans ce cas que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$F'(x) = -2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-2\pi ixt} f(t) dt$$

a) Exprimer la fonction F' à l'aide de F .

b) Dédurre l'expression de F sur $\mathbb{R}$.

(On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.)

4. On suppose dans cette question seulement que $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

a) Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\pi x F(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{e^{-2\pi ixt}}{(1+t^2)^2} dt$

c) Dédurre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

d) En admettant que la fonction F est de classe C^2 et que $\forall x > 0$, $F''(x) = 4\pi^2 F(x)$, donner l'expression de $F(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

5. On se propose, dans cette question, d'établir que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$.

a) Justifier qu'il existe $a > 0$ tel que $|F(x) - \int_{-a}^a e^{-2\pi ixt} f(t) dt| < \varepsilon$.

b) Justifier qu'il existe une fonction en escalier φ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$
 $|f(t) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2a}, \forall t \in [-a, a]$.

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a e^{-2\pi ixt} \varphi(t) dt = 0$ puis déduire que
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.