

Exercice 1

1) $t \mapsto e^{t^2 - itx}$ est continue sur $\mathbb{R}$

$$|f(t)| = e^{t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[\Rightarrow f$ est intégrable sur $[1, +\infty[\Rightarrow f$ intégrable sur $\mathbb{C}$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$$

comme $|f|$ est paire, alors $\int_{-\infty}^0 |f(t)| dt < +\infty$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty \Leftrightarrow f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}$$

$$2) f(t) = \frac{t^{\lambda-1}}{1-e^{-t}} e^{-t}; t \in]0, +\infty[$$

On a f est continue sur $]0, +\infty[$.

sur $]0, 1]$: $1 - e^{-t} \sim t$ et $e^{-t} \sim 1$

$$\Rightarrow f \sim \frac{t^{\lambda-1}}{t} = \frac{1}{t^{2-\lambda}} \text{ qui est intégrable sur }]0, 1[\text{ si } 2-\lambda < 1 \Leftrightarrow \lambda > 1$$

D'où f est intégrable sur $]0, 1[$ si $\lambda > 1$

sur $[1, +\infty[$:

$$1 - e^{-t} \sim 1 \Rightarrow f(t) \sim \frac{t^{\lambda-1}}{e^t}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\lambda-1} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{\lambda-1}}{e^t} = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

Correction Série II Intégration

$\Rightarrow f$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

GL f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si $\lambda > 1$

$$3) f(t) = \frac{E(t) - t}{t^{\lambda+1}}, \lambda > 0; t \geq 1$$

On a $t \mapsto E(t)$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$

$\Rightarrow f$ est continue sur $[1, +\infty[$.

$$\forall t \in [1, +\infty[; t-1 < E(t) \leq t$$

$$\Rightarrow -1 \leq E(t) - t \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{t^{\lambda+1}} \leq \frac{E(t) - t}{t^{\lambda+1}} \leq 0$$

$$\Rightarrow |f(t)| \leq \frac{1}{t^{\lambda+1}}$$

or $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda+1 > 1 \Rightarrow t \mapsto \frac{1}{t^{\lambda+1}}$ est

intégrable sur $[1, +\infty[\Rightarrow f$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

$$4) f(t) = \frac{\ln t}{x+t}, t \in]0, 1[.$$

f est continue sur $]0, 1[$.

$$|f(t)| = \frac{|\ln t|}{x+t} \sim \frac{|\ln t|}{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{t} \cdot |f(t)| \sim \sqrt{t} |\ln t| \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{}$$

$$\Rightarrow |f(t)| = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

or $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intég sur $]0, 1[$

$\Rightarrow f$ est intégrable sur $]0, 1[$

①

$$5.) f(t) = \frac{e^{-t}}{1+tx^x}, \quad t \in [0, +\infty[.$$

f est continue, positive sur $[0, +\infty[$.

$$f(t) \sim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t}}{tx^x} \quad \text{si } x \neq 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^e f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t e^{-t}}{x^x} = 0 \Rightarrow f(t) = o\left(\frac{1}{t^e}\right)$$

or $t \mapsto \frac{1}{t^e}$ est intég sur $[1, +\infty[$.

$\Rightarrow f$ est intég sur $[1, +\infty[$

$\Rightarrow$ " " sur $[0, +\infty[$; $\forall x \neq 0$

• si $x = 0$, $f(t) = e^{-t}$ qui est intég sur $[0, +\infty[$

$\Rightarrow f$ est intég sur $[0, +\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$6.) f(t) = t^n \cdot e^{-(1-i)t} \text{ est continue sur } [0, +\infty[$$

$$|f(t)| = t^n e^{-t}$$

$$t^e |f(t)| = t^{n+e} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow f(t) = o\left(\frac{1}{t^e}\right)$$

or $t \mapsto \frac{1}{t^e}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

$\Rightarrow f$ " " " " $[1, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f$ " " " " $[0, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$7.) t \mapsto f(t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} \text{ est continue et positive sur }]0, +\infty[.$$

$$* f(t) \sim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{e^{-xt}}{1+t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \right)$$

or $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1]$

$\Rightarrow f$ est intégrable sur $]0, 1]$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$* \text{ si } x = 0: f(t) \sim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \text{ qui est intég sur } [1, +\infty[$$

$\Rightarrow f$ intég sur $[1, +\infty[$

$$* \text{ si } x > 0: \lim_{t \rightarrow \infty} t^e f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^e e^{-xt}}{\sqrt{t}} = 0$$

$$\Rightarrow f(t) = o\left(\frac{1}{t^e}\right)$$

$\Rightarrow f$ intég sur $[1, +\infty[$.

* si $x < 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = +\infty \Rightarrow \exists \alpha > 0 \text{ tq } \forall t > \alpha, f(t) > 1$$

or $t \mapsto 1$ n'est pas intég sur $[1, +\infty[$.

$\Rightarrow f$ " " " " $]0, +\infty[$

$\Rightarrow f$ est intég sur $]0, +\infty[$ si $x > 0$

$$8.) f: t \mapsto t^{2p} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \text{ est continue.}$$

et positive sur $\mathbb{R}$. De plus f est paire

$$f(t) \sim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{2p} t^{-2n}}{n^{-n}} = n^n \cdot \frac{1}{t^{2(n-p)}} \text{ qui est intégrable sur } [1, +\infty[$$

si $2(n-p) > 1$

$$\Leftrightarrow n-p > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow n-p > 0 \quad (n, p \in \mathbb{N})$$

$\Rightarrow f$ est intég sur $\mathbb{R}$ si $n-p > 0$