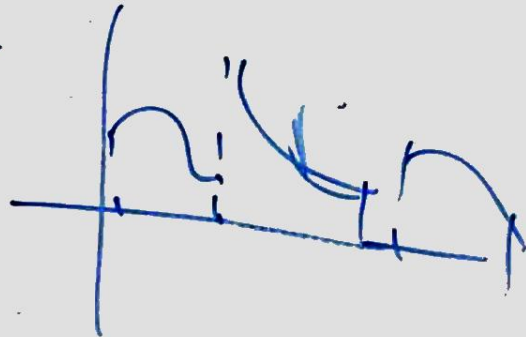


Rappel. Intégrale généralisée

$$f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K} \text{ C.T.}$$

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ CV} \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt \text{ existe dans } \mathbb{K}$$



Dans le cas CV.

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt.$$

$$\Rightarrow \text{Si } \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ CV, alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} f(t) dt = 0$$
$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt.$$

$\Rightarrow$ Si f est continue, alors.

$$H(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt \text{ est C}^1 \text{ et } H'(x) = -f(x).$$

$$\int_a^\infty f(t) dt \text{ CV} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt < \infty$$

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ CV} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

$f \geq 0 \Rightarrow x \mapsto \int_a^x f(t) dt$
est croissante.

$$\Rightarrow \int_a^\infty f(t) dt \text{ CV} \Leftrightarrow F \text{ est majorée}$$

$f: [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$
C.F. et positive

$$\int_a^\infty f(t) dt \text{ CV}$$

Suffisant $\alpha > 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = 0$
Alors $f(x) = o(\frac{1}{x^\alpha})$

$$\Rightarrow \int_a^\infty f(t) dt \text{ CV}$$

$f \leq g$
 $\int_a^\infty g(t) dt \text{ CV}, \text{ alors } \int_a^\infty f(t) dt \text{ CV}.$

$0 \leq f \leq o(\frac{1}{x^\alpha})$
et $\int_a^\infty g(t) dt \Rightarrow \int_a^\infty f(t) dt \text{ CV}$

Si $f \sim g (g \geq 0)$
Alors $\int_a^\infty f(t) dt \text{ CV} \Leftrightarrow \int_a^\infty g(t) dt \text{ CV}.$

Si $f = g + h$
et $\int_a^\infty g(t) dt \text{ CV}$ et $\int_a^\infty h(t) dt \text{ CV}$
 $\Rightarrow \int_a^\infty f(t) dt \text{ CV}$

→ Let $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ c.n.
d $b > a$

$$\int_a^{\infty} f(t) dt < \infty \Leftrightarrow \int_b^{\infty} f(t) dt < \infty$$

Then we can:

$$\int_a^{\infty} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^{\infty} f(t) dt$$

→.

Rappel. Intégrale généralisée

$$f: [a, b[\rightarrow \mathbb{K} \text{ C.T.}$$

$$\int_a^b f(t) dt \text{ CV} \iff \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt \text{ existe dans } \mathbb{K}$$

Dans le cas CV:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t) dt \text{ CV, alors } \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt = 0$$

$\Rightarrow$ si f est continue, alors:

$$H(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ est C}^1 \text{ et } H'(x) = f(x)$$



$$\text{si: } f: [a, b[\rightarrow \mathbb{K} \text{ C.T. } (b \leftarrow \infty)$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \underline{L} < \infty$$

$\Rightarrow$ f est prolongeable par continuité sur $[a, b]$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ CV.}$$

$$\text{Ex: } \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \text{ CV.}$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 < \infty$$

$$\int_a^{\infty} f(t) dt \text{ div.} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt \text{ existe par Cauchy}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ div.} \Leftrightarrow \alpha \leq 1.$$

$$f \geq 0 \Rightarrow x \mapsto \int_a^x f(t) dt \text{ est croissante.}$$

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} f(t) dt \text{ div.} \Leftrightarrow \text{Fest.}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt = \infty$$

$$f \leq g$$

$$\int_a^{\infty} f(t) dt \text{ div., alors } \int_a^{\infty} g(t) dt \text{ div.}$$

$$f: [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$C^1 \text{ et positive}$$

$$\int_a^{\infty} f(t) dt \text{ div.}$$

Suffisant $\alpha \leq 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = +\infty$

Alors $\exists C > a$ $\forall x \geq C; f(x) \geq \frac{1}{x^\alpha}$

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} f(t) dt \text{ div.}$$

$$f \sim g (g \geq 0)$$

$$\int_a^{\infty} f(t) dt \text{ div.} \Leftrightarrow \int_a^{\infty} g(t) dt \text{ div.}$$

$$f = g + h$$

$$\int_a^{\infty} f(t) dt \text{ div. et } \int_a^{\infty} h(t) dt \text{ div.}$$

→ $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ C.T. et $c \in]a, b[$.

$$\int_a^b f(t) dt \text{ CV} \iff \int_a^c f(t) dt \text{ CV} \text{ et } \int_c^b f(t) dt \text{ CV.}$$

Donc le cas du CV

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \int_x^y f(t) dt.$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} F(y) - F(x)$$

Rappel.

$f: I \rightarrow \mathbb{K}$. C.F.
 f intégrable sur $I \iff \int_I |f(x)| dx < \infty$
 $\iff \int_I f(x) dx$ est absc

$\rightarrow$ Si f est intégrable, alors $\int_I f(x) dx < \infty$

si f garde un signe. c.é.

$\rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx < \infty$ mais pas abs

$$* \text{ Ex. } \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ C.V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 < \infty$$

$\Rightarrow f: x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < \infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left[-\frac{\cos t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt \right)$$

$u = \frac{1}{t} \quad u' = -\frac{1}{t^2}$
 $u = \frac{1}{t} \quad u' = -\frac{1}{t^2}$

$$\text{on a. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

$$0 \leq \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$$

et on a $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt < \infty$

$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est abs

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{\cos t}{t^2} dt < \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{\sin t}{t} dt \text{ est finie}$$

$$\text{et } \int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt = -\cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt \text{ CV}$$

* Rq. $\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ n'est pas abs CV.

ona.

$$\int_\pi^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin t dt$$

$$\Rightarrow \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

or $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k}$ diverge et a termes positifs

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = +\infty$$

De plus on a F. x(t) $\int_\pi^x \frac{|\sin t|}{t} dt$ est croissant
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \int_\pi^x \frac{|\sin t|}{t} dt = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_\pi^x \frac{|\sin t|}{t} dt = +\infty$

$$\Rightarrow \int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt \text{ diverge}$$

$$\int_0^\pi \sin t dt$$

Rappel.

$$1) \lim_{x \rightarrow a} F(x) = l \Leftrightarrow (\forall (x_n) \subset D_F \text{ tq } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a) \quad \text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = l.$$

Th $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$
Continue et dérivée

$$\text{Soit } w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$$

$$i) \sum_{n \geq 0} w_n \text{ converge.}$$

$$ii) \sum_{k=1}^n w_k = \int_0^n f(t) dt - \sum_{k=1}^n f(k)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(t) dt \text{ existe } \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} f(n) \text{ cv}$$

$$\int_0^\infty f(t) dt \text{ cv.}$$

2) Si F admet une limite $= l'$
et

$$(\exists (x_n) \subset D_F \text{ tq } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = l$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} F(x) = l.$$

→ $f \sim_b g$ *gardo en signo de*
 $\int_a^b f(t) dt \text{ CV} \iff \int_a^b g(t) dt \text{ CV}.$

→ $f \sim_b g \Rightarrow |f| \sim_b |g|$

f integrable en $[a, b] \iff g$ integrable en $[a, b]$
 → $L^1(I, \mathbb{K}) = \{f: I \rightarrow \mathbb{K} \text{ C.N. } \textcircled{+} \text{ integrable en } I\}$
 $= \mathbb{K} \text{ e.o.}$

C'est un e.o. $CN(I, \mathbb{K}) = \text{e.o. des fonctions C.N. en } I$
 si f, g intég en I , $\forall d \in \mathbb{K}$

$df + g$ est intég en I
 $(|df + g| \leq |d| |f| + |g|)$

→ si $\int_I f(x) dx = 0$
 et f continue et positive $\Rightarrow f = 0$

→ si f continue positive et non nulle
 et $\int_I f(x) dx \text{ CV} \Rightarrow \int_I f(x) dx > 0$

→ si $f: I \rightarrow \mathbb{C}$

$f = \text{Re}(f) + i \text{Im}(f)$

f intég sur $I \iff \text{Re}(f) \text{ et } \text{Im}(f) \text{ sont intégables sur } I$

Dans le cas de CV.

$\text{Re} \left(\int_I f(x) dx \right) = \int_I \text{Re}(f)(x) dx$

$\text{Im} \left(\int_I f(x) dx \right) = \int_I \text{Im}(f)(x) dx$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t(t+1)} dt = \int_1^{\infty} \frac{t}{t} - \frac{1}{t+1} dt$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{1}{t} dt - \int_1^{\infty} \frac{1}{t+1} dt$$

Exercice 1.

a) $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$

$x \mapsto f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ est CT sur $[0, \infty[$.

Pb 5110: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 e^{-x} = 0$

$\Rightarrow e^{-\sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

or $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, \infty[$
(Riemann au 0100)
p. 1

$$\int_a^b f(x) dx$$

$[a, b]$ $]a, b]$ $[a, b[$ $]a, b[$

$\Rightarrow x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$ est intégrable sur $[1, \infty[$.

$\Rightarrow$ " " " $[0, \infty[$

$\Leftrightarrow \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx < \infty$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{(x^2+1) \ln x} dx$

$f(x) = \frac{1}{(x^2+1) \ln x}$ est CT sur $]1, \infty[$

Pben 1 $x^{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e \neq 0$

$\Rightarrow f(x) \sim \frac{1}{1.2 \ln x} \sim \frac{1}{2(x-1)}$

oder $\int_1^2 \frac{1}{2(x-1)} dx$ div $\Rightarrow \int_1^2 f(x) dx$ div

Dann $\int_1^{\infty} f(x) dx$ diverge.

d) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x - \operatorname{arctg} x}{x} dx$?)

$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} 2x - \operatorname{arctg} x}{x}$

fest C.P. nur $\int_0, \infty$

Pben 2 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x - \operatorname{arctg} x}{x} = \frac{0}{0}$
 $= \frac{2}{2} = 1$

$\Rightarrow$ fest prolongable per Stetigkeit zu 0

$\Rightarrow \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \subset V$ (7)

Pben 3

$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x - \operatorname{arctg} x}{x} dx$; $u = \frac{1}{x}$
 $du = -\frac{1}{x^2} dx$
 $= -u^2 dx$

$\int_1^0 \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{u} - \operatorname{arctg} \frac{1}{u} \right) \left(-\frac{1}{u^2} \right) du$

$= \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \frac{2}{u} - \operatorname{arctg} \frac{1}{u}}{u} du$

$= \int_0^1 \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{u}{2} - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} u}{u} du$

$$= \int_0^1 \frac{\arctan u - \arctan \frac{u}{2}}{u} du.$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\arctan u - \arctan \frac{u}{2}}{u} = \frac{1}{2}$$

g) $\int_0^{+\infty} \frac{x \cdot \sin x}{x^2 + x + 1} dx$.?)

$$f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + x + 1} \text{ est-continue sur } [0, \infty)$$

~~$\frac{\sin x}{x}$~~

~~$\oint \frac{\sin u}{u} du \text{ CV} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \text{ CV.}$~~

~~$$\frac{x}{x^2 + x + 1} \quad \frac{x \sin x}{x^2 + x + 1}$$~~

c) $\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$??

$$f: x \mapsto x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} e_{\alpha, \beta} [C, \mu_m]_{0,1} [$$

Pb no. $f(x) \sim x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\alpha-1}}$

$\Rightarrow \int_{\text{integrierbar}}]0, \frac{1}{2}]$ $\Leftrightarrow 1-\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$
Probem 2:
 $f(x) \sim (1-x)^{\beta-1}$

$$p(x) = (1-x)^{\beta-1} = \frac{1}{(1-x)^{1-\beta}} \text{ existiert für } \beta > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+$$

Alon. f intég en $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow \alpha > 0$ et $p > 0$.

$$e) \int_1^{\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt = \int_1^{\infty} \frac{\cos 2t + 1}{2t} dt$$

$$= \int_1^{\infty} \left(\frac{\cos 2t}{2t} + \frac{1}{2t} \right) dt \quad ??$$

ona. $\int_1^{\infty} \frac{1}{2t} dt$ div.

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos 2t}{2t} dt \text{ CV (IPP)}$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \left(\frac{\cos 2t}{2t} + \frac{1}{2t} \right) dt \text{ div}$$

IPP

Soit $U, V: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Si $\lim_{x \rightarrow b} U(x) \cdot V(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ (finie dans $\mathbb{R}$)

$$\int_a^b U'(t) \cdot V(t) dt \text{ CV} \Leftrightarrow \int_a^b U(t) \cdot V'(t) dt \text{ CV}$$

Cas

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x U'(t) V(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \left([U(t) V(t)]_a^x - \int_a^x U(t) V'(t) dt \right)$$

Dans le cas de CV.

$$\int_a^b U'(t) V(t) dt = \left[U(t) V(t) \right]_a^b - \int_a^b U(t) V'(t) dt$$

$$\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt = \cancel{\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{e^t}{t^{\frac{3}{2}}} dt$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow u' = -\frac{1}{2} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

$$v = e^t \rightarrow v' = e^t$$

Exercice 2.

$$f: t \mapsto t^{x-1} e^{-t}, x \in \mathbb{R}$$

est C. D. sur $]0, \infty[$.

Pbenc:

$$f(t) \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} \text{ quand } t \rightarrow 0$$

Pbenc:

$$f(t) = t^{x-1} e^{-t} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

$$a \ t \mapsto \frac{1}{t^2} e^{-t} \text{ int\'egrable sur }]1, \infty[$$

$$\Rightarrow f \text{ est } \dots \dots \dots \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc f int\'egrable sur $]0, \infty[\Leftrightarrow x > 0$

$$\text{On pose } \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0$$

$$2) \text{ Rq. } \forall x > 0; \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

$$\text{On a } \Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} \frac{t^x}{u} \frac{e^{-t}}{u'} dt$$

$$\text{soit } u(t) = t^x \rightarrow u'(t) = x t^{x-1}$$

$$v(t) = e^{-t} \rightarrow v'(t) = -e^{-t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^x e^{-t} = 0 \quad (x > 0)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) v(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t^x e^{-t} = 0$$

$$a \int_0^{\infty} u'(t) v(t) dt = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{c.v.}$$

Mon.

$$\int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \underbrace{\left[u(t) v(t) \right]_0^{\infty}}_{\text{Ib}} + \int_0^{\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\Rightarrow \Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \quad \forall x > 0$$

*. vérifiez que $\Gamma(x) > 0, \forall x > 0$.

$$\text{ona } \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

$t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue positive et non nulle et $\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt > 0$.

$$\Rightarrow \Gamma(x) > 0$$

$$3) I_n = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = \Gamma(n+1)$$

$$\text{ona } \Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} = n \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)} = \prod_{k=1}^n k = n!$$

$$\frac{\Gamma''(n+1)}{\Gamma'(1)} = n!$$

$$\text{or } \Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1.$$

$$\text{Si } n=0 \Rightarrow \Gamma'(1) = 1 = 0!$$

$$\Rightarrow \Gamma(n+1) = n! \\ \boxed{\Gamma_n = n!}$$

Exercice 5. "Série I"

$f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ Continue

lg. $\int_L \frac{f(t)}{t} dt < V \Rightarrow \int_{\alpha} \frac{f(t)}{t} dt < V$

Soit $\int_{\alpha} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$

ona. $\int_x \frac{f(at)}{t} dt = \int_{u=\alpha x}^{\infty} \frac{f(u)}{u} du < V$

de m. $\int_x \frac{f(bt)}{t} dt < V$

$\Rightarrow \int_x \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = \int_{\alpha x}^{\infty} \frac{f(u)}{u} du - \int_{bx}^{\infty} \frac{f(u)}{u} du$

$= \int_{\alpha x}^{bx} \frac{f(u)}{u} du + \int_{bx}^{\infty} \frac{f(u)}{u} du - \int_{bx}^{\infty} \frac{f(u)}{u} du$

b) $\pi_q \int_0^{\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt < V$

et que $\int_0^{\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = f(0) \ln \frac{b}{a}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \int_{\alpha x}^{bx} \frac{f(u)}{u} du$

f est continue sur $[a, b]$
 $\Rightarrow f$ est bornée et attient ses bornes.

$\Rightarrow \exists \alpha_x \in [a, b]$ $\min_{[a, b]} f(x) = f(\alpha_x)$
 $\exists \beta_x \in [a, b]$ $\max_{[a, b]} f(x) = f(\beta_x)$

$$\forall x \in [a_n, b_n], \quad f(a_n) \leq f(x) \leq f(b_n)$$

$$\Rightarrow f(a_n) \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{u} du \leq \int_{a_n}^{b_n} \frac{f(u)}{u} du \leq f(b_n) \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{u} du$$

$$f(a_n) \cdot \ln \frac{b}{a}$$

$$\leq f(b_n) \cdot \ln \frac{b}{a}$$

$$\text{or } a_n \leq x_n \leq b_n, \quad \left. \begin{array}{l} a_n \leq x_n \leq b_n \\ a_n \leq b_n \leq b_n \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$f \text{ continuous at } 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} \frac{f(u)}{u} du = f(0) \cdot \ln \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \int_0^a \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = f(0) \cdot \ln \frac{b}{a}$$

Exercice 6

1) $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ intégrable.

hyp et lim $f(x)$ existe; mg $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = 0$

* SC $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l < \infty$ et $l \neq 0$

$\Rightarrow f \sim l$ or $x \rightarrow l \neq 0$ n'est pas intégrable sur $(0, \infty)$

$\Rightarrow f$ n'est pas intégrable sur $(0, \infty)$ absolument.

* SO $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = \infty \Rightarrow \exists r(x) \text{ tq } \forall x \in (r(x), \infty)$
 $|f(x)| \geq 1$.

or $x \rightarrow \infty$ n'est pas intégrable sur $(0, \infty)$

$\Rightarrow f$

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

Alors $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

e) soit $f \in C^2$ sur $[0, \infty[$ croissante.

tq f et f'' sont intégrables sur $[0, \infty[$

Rq $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$

et f' intégrable sur $[0, \infty[$

ona $f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(t) dt$

et f'' intégrable sur $[0, \infty[$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f''(t) dt = \int_0^{\infty} f''(t) dt$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) < \infty$$

ona. f est croissante $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existe finie ou ∞
 et $f' \geq 0$
 et f intég sur $[0, \infty[$

Alors d'après 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

et on a $\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f'(t) dt = -f(0) < \infty$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} f'(t) dt < \infty \Leftrightarrow f' \text{ intég sur } [0, \infty[\text{ (} f' \geq 0 \text{)}$$

et on a $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ existe $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$

Exercice 5 "Série II".

Intégr. sur $\mathbb{R}$, et Continuité sur $\mathbb{R}$.

on pose $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi i x t} f(t) dt, x \in \mathbb{R}$

1) $t \mapsto e^{-\pi i x t} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, |e^{-\pi i x t} f(t)| = |f(t)|$ qui est

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi i x t} f(t) dt$ CV, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi i x t} f(t) dt$ est dans $\mathcal{D}$.

$\Rightarrow D_F = \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, |F(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = c_0$$

$\Rightarrow F$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Rq: $f \in \mathcal{D}$ sur $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \text{ CV} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \text{ CV et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

$$\text{ou } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t) dt.$$

$\Rightarrow$ si f est paire.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \text{ CV} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

Dans le cas où f est impaire.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0$$

→ Impaire: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \text{ CV} \Leftrightarrow \int_0^{\infty} f(t) dt \text{ CV}$

Donc on a $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$

5.) soit $\varepsilon > 0$.

2) Il $\exists a > 0$ et $|F(x) - \int_a^x e^{-at} f(t) dt| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}$

$$|F(x) - \int_{-y}^y e^{-at} f(t) dt| = \left| \int_{-y}^x e^{-at} f(t) dt - \int_{-y}^y e^{-at} f(t) dt \right|$$

$$= \left| \int_{-y}^x e^{-at} f(t) dt + \int_y^{\infty} e^{-at} f(t) dt \right|$$

$$\leq \int_{-y}^x |f(t)| dt + \int_y^{\infty} |f(t)| dt \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 \text{ et } \forall y > B$

$$\int_{-\infty}^{-y} |f(t)| dt + \int_y^{\infty} |f(t)| dt < \varepsilon$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

on prend $a > B$.

$$\Rightarrow |F(x) - \int_a^x e^{-at} f(t) dt| < \varepsilon$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

b) The diapproximation.

Si f est C.P. sur $[a, b]$, alors.

$\forall \varepsilon > 0; \exists \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier.

t.q. $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$

c) φ est en escalier $\Rightarrow \exists \mathcal{T} = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ une subdivision de $[a, a]$. ($a_0 = -a, a_n = a$)

$\varphi(x) = d_k; \forall x \in]a_k, a_{k+1}[$ ($k = 0, \dots, n-1$)

$$\Rightarrow \int_a^a e^{-\varepsilon i x t} \varphi(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} d_k e^{-\varepsilon i x t} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_k}{-\varepsilon i x} (e^{-\varepsilon i x a_{k+1}} - e^{-\varepsilon i x a_k})$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^a e^{-\varepsilon i x t} \varphi(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon x} \sum_{k=0}^{n-1} d_k$$

$$\leq \frac{d_k}{x} \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow \infty$$

Il y a $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$.

Diapason.

$$F(x) = F(x) - \int_a^a e^{-\varepsilon i x t} f(t) dt + \int_a^a e^{-\varepsilon i x t} f(t) dt$$

$$+ \int_a^a e^{-\varepsilon i x t} (f(t) - \varphi(t)) dt + \int_a^a e^{-\varepsilon i x t} \varphi(t) dt$$

$$\Rightarrow |F(x)| \leq |F(x) - \int_a^a e^{-\varepsilon i x t} f(t) dt|$$

$$+ \int_a^a |f(t) - \varphi(t)| dt + \left| \int_a^a e^{-\varepsilon i x t} \varphi(t) dt \right|$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

$$2 \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{ixt} \varphi(t) dt = 0$$

$$\Rightarrow \text{Pour } \varepsilon > 0; \exists A > 0 \text{ tq } \forall x > A; \left| \int_{-a}^a e^{ixt} \varphi(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Ainsi pour $\varepsilon > 0$, $\exists A > 0$ tq $\forall x > A$; $|F(x)| < 3\varepsilon$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$$

Lemme de Lebesgue.

Si f est c.n sur $[a, b]$.

Alors $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^b e^{ixt} f(t) dt = 0$ ou $\sin(xt)$ ou $\cos(xt)$.

→ Il y a pour $f = \varphi$ en exercice.
 (utiliser le th d'approximation)

Si f est C^1 sur $[a, b]$
 utiliser Ipp

Rappel: $f, g: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$
 si $f \sim_b g$ ($g \geq 0$)

si g est intégrable sur $[a, b[$.

$$\int_a^b f(t) dt \sim_b \int_a^b g(t) dt$$

→ si $f, g:]a, b]$
 $\int_a^x$

si g n'est pas intégrable sur $[a, b[$

$$\int_a^x f(t) dt \sim_b \int_a^x g(t) dt$$

$$\int_a^x$$

Ex.
 Tr. si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \leftarrow$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = l.$$

Rép.

ona. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$

$$\Leftrightarrow f(x) = l + o(1)$$

$$\Rightarrow f(x) - l = o(1)$$

$$\Rightarrow \int_0^x (f(t) - l) dt = o(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt - lx = o(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} - l = o(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = l.$$

$$\rightarrow \text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}}{n} = l.$$

Si $f \in C^1$ sur $[a, b]$
utiliser Ipp

Exercice 7 "Série 1"

3)iv)

D'après i)

$$\int_a^b g^2(t) dt = 2 \int_a^b g(t) f(t) dt + a g^2(a) - \underbrace{b g^2(b)}_{=0}$$

$$\leq 2 \int_a^b g(t) f(t) dt + a g^2(a)$$

ICSH.

$$\leq 2 \left(\int_a^b g^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} + a g^2(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b g^2(t) dt$$

$$\leq 2 \left(\int_a^b g^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} + a g^2(a) \quad (*)$$

D'autre part on a.

$$\left[\left(\int_a^b g^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_a^b f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = \int_a^b g^2(t) dt + \int_a^b f^2(t) dt - 2 \int_a^b g(t) f(t) dt$$

(*)

$$a g^2(a) + \int_a^b f^2(t) dt - 2 \int_a^b g(t) f(t) dt \geq \left(\int_a^b g^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_a^b f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit f et g continues sur $[a, b]$

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

u) D'après 3/.

$$(**) \int_a^b g^2(t) dt \leq \left[\left| a g^2(a) + \left(\int_0^{\infty} f^2(t) dt \right) \right| + \sqrt{\int_0^{\infty} f^2(t) dt} \right]^2$$

Puisque g est prolongeable par continuité en 0.

$$\Rightarrow \int_0^b g^2(t) dt \text{ CV.}$$

(**)

$$a \rightarrow 0 \quad \int_0^b g^2(t) dt \leq 4 \int_0^{\infty} f^2(t) dt, \quad \forall b > 0$$

$g^2 \geq 0$ et $\int_0^b g^2(t) dt$ est majoré par $4 \int_0^{\infty} f^2(t) dt$.

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} g^2(t) dt \text{ CV.}$$

$1_{\text{sur } [a, b]}$

I_{pp}

Partie I. $x > -1$

2. $f(t) = \frac{t^x}{t-1} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \text{et continue sur }]0,1[$

Pben 1.

$$f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{t-1} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} 1$$

$\Rightarrow f$ est prolongable par continuité en 1

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt < \infty$$

Pben 2. $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^x \cdot \frac{1}{t-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^x$

D'après $\int_0^{\frac{1}{2}} t^x dt < \infty$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt < \infty$$

en bien

ona $x > -1 \Rightarrow -x < 1 \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ q. } -x < \alpha < 1$

$$\begin{cases} t^\alpha \cdot t^x \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{\alpha+x} > 0 \\ \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) = O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$$

$$\text{or } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^\alpha} dt < \infty \quad (\alpha < 1) \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt < \infty$$

$$d) \text{ Rq. } \lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = 0$$

$$\text{ona. } H(x) = \int_0^1 e^{x \ln t} \frac{1}{t-1} dt.$$

$$\text{ona. } g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$t \mapsto \begin{cases} \frac{t \ln t}{t-1} & \text{si } t \in [0,1], \\ 0 & \text{si } t=0, \\ 1 & \text{si } t=1. \end{cases}$$

g est continue sur $[0,1]$
 $\Rightarrow g$ est bornée $\Rightarrow \exists M \geq 0$ tel
 $|g(t)| \leq M, \forall t \in [0,1].$

$$\text{or } |H(x)| = \left| \int_0^1 e^{x \ln t} g(t) dt \right| \leq \int_0^1 e^{x \ln t} |g(t)| dt$$

$$\leq M \int_0^1 e^{x \ln t} dt = \frac{M}{x} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = 0$$

u) b/ D'après 3/

$$U(x+k-1) - H(x+k) = \frac{1}{(x+k)^2} \quad \forall k \geq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n H(x+k-1) - H(x+k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)^2}$$

||

$$H(x) - H(x+n)$$

Partie II.

1) c/ $H(x) \sim \frac{1}{x}$

2) $U_n = H(n) \sim \frac{1}{n}$

ou $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ div $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} H(n)$ div

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n U_n \text{ est alternée } (U_n = H(n) > 0)$$

$$U_n = H(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\dots H \text{ est } \searrow \Rightarrow \text{la suite } (H(n)) \searrow$$

$$\Rightarrow (U_n) \text{ est } \searrow$$

T.S.A $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} (-1)^n U_n \subset V.$

b) $t \in \mathbb{J}_{0,1} \cap \mathbb{C}$

$$f_n(t) = (-1)^n t^n \frac{L_n t}{t-1}$$

$\forall t \in \mathbb{J}_{0,1} \cap \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \frac{1}{1-t}$$

$\frac{L_n t}{t-1}, \forall t \in \mathbb{J}_{0,1} \cap \mathbb{C}$

179 $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k(t)$ est intégrable sur I

Calculer $R_n(t)$
 • géométrique
 • télescopique

• si $\sum_{n \geq 0} p_n(t)$ vérifie T.S.A.

$|R_n(t)| \leq |p_{n+1}(t)|$

Comparaizon
 série et intégrale

$R_n = S - S_n$

• S_n est intégrable sur I
 • S est intégrable sur I

c) i. $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \cdot t^k \cdot \frac{L_n t}{t-1} = \frac{L_n t}{t-1} \cdot \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} = (-1)^{n+1} t^{n+1} \frac{L_n t}{t^2-1}$

• $t \mapsto R_n$ est continue sur $\text{Joi}(I)$
 • $\lim_{t \rightarrow 0} R_n(t) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{t \rightarrow 2} R_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{2}$

$\Rightarrow R_n$ prolongée par continuité sur $[0,1]$
 $\Rightarrow$ intégrable sur $\text{Joi}(I)$

$$\left| \int_0^1 R_n(t) dt \right| \leq \int_0^1 |R_n(t)| dt$$

$$\leq \int_0^1 \frac{t^{n+1} \cdot L \ln t}{e^e - 1} dt$$

$$\leq \int_0^1 \frac{t^n}{(e+1)} \cdot \left(\frac{t L \ln t}{t-e} \right) dt$$

$$\leq \frac{1}{e+1} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)(e+1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 R_n(t) dt = 0$$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{n} p_n(t) dt = \int_0^1 p(t) dt$

$$\text{then } \int_0^1 S(t) dt = \int_0^1 (S_n(t) + R_n(t)) dt$$

$$= \int_0^1 \underbrace{S_n(t)}_{\text{cv}} dt + \int_0^1 \underbrace{R_n(t)}_{\text{cv}} dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^n p_k(t) dt + \int_0^1 R_n(t) dt$$

supremum

$$\int_0^1 S(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 p_k(t) dt + \int_0^1 R_n(t) dt$$

n → ∞, monotonic:

$$\int_0^1 S(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 p_k(t) dt$$