

## I) Espaces vectoriels normés

### 1) Définition et exemples usuelles

#### Définition 1 (d'une norme).

On appelle norme sur  $E$  toute application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant

- ① Séparation :  $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0$
  - ② Homogénéité :  $\forall \alpha \in K, \forall x \in E, N(\alpha x) = |\alpha|N(x)$
  - ③ Inégalité triangulaire :  $\forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$
- Le couple  $(E, N)$  est appelé un espace vectoriel normé.

#### Remarque 1.

- ① Une norme est généralement notée  $\| \cdot \|$ .
- ② Soit  $(E, \| \cdot \|)$  un e.v.n.
  - Un vecteur  $x$  de  $E$  est dit unitaire si  $\|x\| = 1$ .
  - Pour tout  $y \in E$ , non nul,  $\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = 1$ .

#### Proposition 1.

Soit  $(E, \| \cdot \|)$  un e.v.n.

- ① Inégalité triangulaire renversée :  $\forall x, y \in E, | \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|$
- ② Inégalité triangulaire généralisée : soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in E$ , alors

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\|$$

#### Exemples

##### ① Norme sur $K$ :

La valeur absolue (resp. le module) est une norme sur  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ )

##### ② Normes sur $K^n$ :

Pour  $X = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ , on pose

$$\|X\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \|X\|_2 = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \|X\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

$\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$  et  $\| \cdot \|_\infty$  sont des normes sur  $E$ .

##### ③ Norme sur $\mathcal{B}(X, K)$ :

Soit  $X$  un ensemble non vide,  $\mathcal{B}(X, K)$  désigne la  $K$ -algèbre des applications bornées sur  $X$  à valeurs dans  $K$ .

Pour  $f \in \mathcal{B}(X, K)$ , on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in X} |f(t)|$$

$\| \cdot \|_\infty$  est une norme sur  $\mathcal{B}(X, K)$ , appelée norme de la convergence uniforme.

##### ④ Normes sur $\mathcal{C}([a, b], K)$ :

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  tel que  $a < b$  et  $\mathcal{C}([a, b], K)$  désigne la  $K$ -algèbre des applications continues sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $K$ . on pose

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \quad \|f\|_2 = \left( \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

- $\| \cdot \|_1$  est une norme sur  $\mathcal{C}([a, b], K)$ , appelée norme de la convergence en moyenne.
- $\| \cdot \|_2$  est une norme sur  $\mathcal{C}([a, b], K)$ , appelée norme de la convergence en moyenne quadratique.

- Comme toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes, on définit aussi la norme  $\| \cdot \|_\infty$  sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ , par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

#### ④ Normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ :

Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

on pose

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \quad \|A\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|$$

$\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$  et  $\| \cdot \|_\infty$  sont des normes sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Remarquons que pour toute matrice  $A$  carrée de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $\|A\|_1 = \|{}^t A\|_\infty$  et  $\|A\|_2 = \|{}^t A\|_2$ .

#### Exercice 1

Pour tout  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , on pose  $\mathcal{N}_\infty(A) = \max_{1 \leq i,j \leq p} |a_{i,j}|$ .

- ① Montrer que  $\mathcal{N}_\infty$  est une norme sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ .
- ② Montrer que pour tout  $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{N}_\infty(AB) \leq n \mathcal{N}_\infty(A) \mathcal{N}_\infty(B)$ .

#### Solution

① Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}, B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$

- Séparation :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\infty(A) = 0 &\iff \max_{1 \leq i,j \leq p} |a_{i,j}| = 0 \\ &\iff \forall i, j \in [1, p], a_{i,j} = 0 \\ &\iff A = 0 \end{aligned}$$

- Homogénéité :  $\mathcal{N}_\infty(\lambda A) = \max_{1 \leq i,j \leq p} |\lambda a_{i,j}| = \max_{1 \leq i,j \leq p} |\lambda| |a_{i,j}| = |\lambda| \max_{1 \leq i,j \leq p} |a_{i,j}| = |\lambda| \mathcal{N}_\infty(A)$

- Inégalité triangulaire : on a  $\mathcal{N}_\infty(A+B) = \max_{1 \leq i,j \leq p} |a_{i,j} + b_{i,j}|$

Pour tout  $i, j \in [1, p]$ ,  $|a_{i,j} + b_{i,j}| \leq |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \leq \max_{1 \leq i,j \leq p} |a_{i,j}| + \max_{1 \leq i,j \leq p} |b_{i,j}| = \mathcal{N}_\infty(A) + \mathcal{N}_\infty(B)$

Donc  $\mathcal{N}_\infty(A+B) \leq \mathcal{N}_\infty(A) + \mathcal{N}_\infty(B)$ .

② Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}, B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  et  $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} = AB$

Pour tout  $i, j \in [1, p]$ ,  $c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$ , alors  $|c_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^p |a_{i,k}| |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^p \mathcal{N}_\infty(A) \mathcal{N}_\infty(B) = n \mathcal{N}_\infty(A) \mathcal{N}_\infty(B)$

Donc  $\mathcal{N}_\infty(AB) = \mathcal{N}_\infty(C) = \max_{1 \leq i,j \leq p} |c_{i,j}| \leq n \mathcal{N}_\infty(A) \mathcal{N}_\infty(B) \quad \square$

#### Exercice 2 (Norme infinie sur un espace vectoriel de dimension finie)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $p$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ .

Pour tout  $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i \in E$ , on pose  $\mathcal{N}_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$ .

Montrer que  $\mathcal{N}_\infty$  est une norme sur  $E$ , (appelée norme infinie associée à la base  $\mathcal{B}$ )

#### Solution

Soit  $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i, y = \sum_{i=1}^p y_i e_i \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- Séparation :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\infty(x) = 0 &\iff \max_{1 \leq i \leq p} |x_i| = 0 \\ &\iff \forall i \in [1, p], x_i = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

- Homogénéité :  $\mathcal{N}_\infty(\lambda x) = \max_{1 \leq i \leq p} |\lambda x_i| = \max_{1 \leq i \leq p} |\lambda| |x_i| = |\lambda| \max_{1 \leq i \leq p} |x_i| = |\lambda| \mathcal{N}_\infty(x)$

- Inégalité triangulaire : on a  $\mathcal{N}_\infty(x+y) = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i + y_i|$

Pour tout  $i \in [1, p]$ ,  $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq p} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq p} |y_i| = \mathcal{N}_\infty(x) + \mathcal{N}_\infty(y)$

Donc  $\mathcal{N}_\infty(x+y) \leq \mathcal{N}_\infty(x) + \mathcal{N}_\infty(y) \quad \square$

## 2) Norme euclidienne

Rappelons tout d'abord la définition d'un espace préhilbertien réel et l'inégalité de Cauchy Schwartz.  
On considère  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

### Définition 2 (Produit scalaire).

• On appelle produit scalaire sur  $E$ , une application :

$f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

①  $f$  est une forme bilinéaire :  $\forall x, y, z \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\alpha x + y, z) &= \alpha f(x, z) + f(y, z) \\ f(x, \alpha y + z) &= \alpha f(x, y) + f(x, z) \end{aligned}$$

②  $f$  est symétrique :  $\forall x, y \in E, f(x, y) = f(y, x)$

③  $f$  est positive :  $\forall x \in E, f(x, x) \geq 0$

④  $f$  est définie :  $\forall x \in E, f(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ .

• On note  $\langle x, y \rangle$  au lieu de  $f(x, y)$ .

• Un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien réel.

• Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé un espace euclidien.

### Remarque 2.

- ①  $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est linéaire par rapport à une} \\ \text{variable et symétrique} \end{array} \right. \Rightarrow f \text{ est bilinéaire.}$
- ②  $f$  est définie et positive  $\Leftrightarrow \forall x \in E \setminus \{0\}, f(x, x) > 0$ .

### Définition 3 (Norme euclidienne).

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel. On définit la norme euclidienne associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  par :

$$\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

### Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Schwartz).

Pour tous vecteurs  $x, y \in E$ , on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz :  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

$$\text{Avec } |\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R}, y = \alpha x \end{cases} \quad \text{et} \quad \langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^+, y = \alpha x \end{cases}$$

### Proposition 2 (Norme associée au produit scalaire).

La norme euclidienne  $\|\cdot\|$  associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $E$  est bien une norme sur  $E$ .  
Ainsi  $E$  est muni d'une structure d'espace vectoriel normé.

### Exemples (Quelques exemples de normes euclidiennes)

1)  $\|\cdot\|_2$  est une norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} \text{Soit } X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad \langle X, Y \rangle &= \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ \|X\| &= \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \|X\|_2 \\ \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} \quad (\text{Cauchy-Schwartz}) \end{aligned}$$

2)  $\|\cdot\|_2$  est une norme euclidienne sur  $M_{n,p}(\mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned} \text{Soit } f, g \in M_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \langle A, B \rangle &= \text{Tr}({}^t A B) \\ \|A\| &= \sqrt{\text{Tr}({}^t A A)} = \|A\|_2 \\ |\text{Tr}({}^t A B)| &\leq \sqrt{\text{Tr}({}^t A A)} \sqrt{\text{Tr}({}^t B B)} \quad (\text{Cauchy-Schwartz}) \end{aligned}$$

3)  $\| \cdot \|_2$  est une norme euclidienne sur l'espace des fonctions continues sur  $[a, b]$ ,  $\mathcal{E} = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  :

$$\text{Soit } f, g \in \mathcal{E}, \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} = \|f\|_2$$

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt} \text{ (Cauchy-Schwartz)}$$

### Exercice 3

On note  $\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum_{n \geq 0} x_n^2 \text{ converge} \right\}$

① Montrer que  $\ell^2(\mathbb{R})$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

② Soit  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R})$ ,

(a) Montrer que  $\sum_{n \geq 0} x_n y_n$  converge.

on pose, alors  $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ .

(b) Vérifier que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $\ell^2(\mathbb{R})$ .

### Solution

① Nous allons montrer que  $\ell^2(\mathbb{R})$  est sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

•  $\ell^2(\mathbb{R})$  contient la suite nulle.

• Soit  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R})$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, (\alpha x_n + y_n)^2 &= \alpha^2 x_n^2 + 2\alpha x_n y_n + y_n^2 \\ &\leq \alpha^2 x_n^2 + |\alpha|(x_n^2 + y_n^2) + y_n^2 \\ &\leq (\alpha^2 + |\alpha|)x_n^2 + (1 + |\alpha|)y_n^2. \end{aligned}$$

Puisque les séries  $\sum_{n \geq 0} x_n^2$  et  $\sum_{n \geq 0} y_n^2$  convergent, alors la série  $\sum_{n \geq 0} (\alpha^2 + |\alpha|)x_n^2 + (1 + |\alpha|)y_n^2$  converge, par le critère de comparaison,

on en déduit que la série  $\sum_{n \geq 0} (\alpha x_n + y_n)^2$  est convergente.

Ainsi  $\alpha x + y \in \ell^2(\mathbb{R})$ .

② Soit  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R})$ ,

(a) On a  $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n y_n| \leq \frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)$ .

Puisque les séries  $\sum_{n \geq 0} x_n^2$  et  $\sum_{n \geq 0} y_n^2$  convergent, alors la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)$  converge, par le critère de comparaison, on en déduit

que la série  $\sum_{n \geq 0} x_n y_n$  est absolument convergente, par suite elle est convergente.

(b) Il est facile de vérifier que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\ell^2(\mathbb{R})$  ☐

### Exercice 4

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

On note  $L_c^2(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) / \int_I f(t)^2 dt \text{ converge} \right\}$

① Montrer que  $L_c^2(I)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

② Soit  $f, g \in L_c^2(I)$ ,

(a) Montrer que  $\int_I f(t)g(t)dt$  converge.

on pose, alors  $\langle f, g \rangle = \int_I f(t)g(t)dt$ .

(b) vérifier que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $L_c^2(I)$ .

③ Montrer que  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  converge et  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \frac{1}{e\sqrt{2}}$

### Solution

① Nous allons montrer que  $L_c^2(I)$  est sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ .

•  $L_c^2(I)$  contient fonction nulle.

• Soit  $f, g \in L_c^2(I)$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \forall t \in I, (\alpha f(t) + g(t))^2 &= \alpha^2 f(t)^2 + 2\alpha f(t)g(t) + g(t)^2 \\ &\leq \alpha^2 f(t)^2 + |\alpha|(f(t)^2 + g(t)^2) + g(t)^2 \\ &\leq (\alpha^2 + |\alpha|)f(t)^2 + (1 + |\alpha|)g(t)^2. \end{aligned}$$

Puisque les intégrales  $\int_I f(t)^2 dt$  et  $\int_I g(t)^2 dt$  convergent, alors l'intégrale  $\int_I ((\alpha^2 + |\alpha|)f(t)^2 + (1 + |\alpha|)g(t)^2) dt$  converge, par le critère de comparaison, on en déduit que l'intégrale  $\int_I (\alpha f(t) + g(t))^2 dt$  est convergente.

Ainsi  $\alpha f + g \in L_c^2(I)$ .

② Soit  $f, g \in L_c^2(I)$ ,

(a) On a  $\forall t \in I, |f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2}(f(t)^2 + g(t)^2)$ .

Puisque les intégrales  $\int_I f(t)^2$  et  $\int_I g(t)^2$  convergent, alors l'intégrale  $\int_I \frac{1}{2}(f(t)^2 + g(t)^2)$  converge, par le critère de comparaison, on en déduit que l'intégrale  $\int_I f(t)g(t)$  est absolument convergente, par suite elle est convergente.

(b) Il est facile de vérifier que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\ell^2(\mathbb{R})$ .

③ En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt &\leq \sqrt{\int_1^{+\infty} e^{-2t} dt} \sqrt{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}} \\ &= \sqrt{\left[ \frac{-e^{-2t}}{2} \right]_1^{+\infty}} \sqrt{\left[ \frac{-1}{t} \right]_1^{+\infty}} \\ &= \sqrt{\frac{e^{-2}}{2}} = \frac{1}{e\sqrt{2}} \quad \square \end{aligned}$$

### 3) Norme produit

Soit  $p \geq 1$ , on considère  $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

**Définition 4 (Norme produit).**

L'application  $N : \prod_{k=1}^p E_k \rightarrow \mathbb{R}^+$   
 $(x_1, \dots, x_p) \mapsto \max_{1 \leq k \leq p} N_k(x_k)$

est une norme sur l'espace produit  $\prod_{k=1}^p E_k$ , appelée norme produit.

**Exemple** La norme produit sur  $\mathbb{R}^p$  associée à la valeur absolue sur  $\mathbb{R}$  est la norme infinie  $\|\cdot\|_\infty$ .  $\square$

### 4) Normes d'algèbre

On considère  $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre.

**Définition 5 (Norme sous multiplicative).**

Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathcal{A}$ .

On dit que  $\|\cdot\|$  est sous-multiplicative si  $\forall x, y \in \mathcal{A}, \|x \times y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ .

Dans ce cas, on dit que  $\|\cdot\|$  est une norme d'algèbre et  $\mathcal{A}$  est une algèbre normée.

**Remarque 3.**

Si  $\|\cdot\|$  est une norme d'algèbre sur  $\mathcal{A}$ , alors  $\|1_{\mathcal{A}}\| \geq 1$ .

#### Exemples

① On considère la  $\mathbb{R}$ -algèbre  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme d'algèbre.

② Soit  $n \geq 2$ , on considère la  $\mathbb{K}$ -algèbre  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$  sont des normes d'algèbre.

•  $A \mapsto \mathcal{N}_\infty(A) = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$  n'est pas une norme d'algèbre.

En effet, soit  $J \in E$ , dont tout les coefficients valent 1, on a  $J^2 = nJ$ , donc  $\mathcal{N}_\infty(J^2) = n > 1 = \mathcal{N}_\infty(J)\mathcal{N}_\infty(J)$ .

**Proposition 3.**

Soit  $(A, || \cdot ||)$  une algèbre normée.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_1, \dots, x_n \in A$ ,  $||x_1 \times \dots \times x_n|| \leq ||x_1|| \dots ||x_n||$

En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in A$ ,  $||x^n|| \leq ||x||^n$ .

**5) Distance associée à une norme**

On considère  $(E, || \cdot ||)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

**Définition 6 (Distance).**

- Soit  $x, y$  deux vecteurs de  $E$ . On appelle distance de  $x$  à  $y$ , notée  $d(x, y)$  le réel positif  $d(x, y) = ||x - y||$ .
- On appelle distance sur  $E$ , associée à la norme l'application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$   
 $(x, y) \mapsto d(x, y) = ||x - y||$

**Remarque 4 (Propriétés d'une distance).**

Soient  $x, y, z \in E$ ,

- Séparation :  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ .
- Symétrie :  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- Inégalité triangulaire :  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .
- Invariance par translation :  $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ .

**Définition 7 (Distance d'un point à une partie).**

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $x$  un vecteur de  $E$ , on appelle distance de  $x$  à  $A$ , notée  $d(x, A)$  le réel positif

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_{a \in A} ||x - a||$$

**Exemples**

Dans  $\mathbb{R}$ ,

$$d(-\frac{2}{3}, \mathbb{N}) = \frac{2}{3} = |-\frac{2}{3} - 0|, d(-\frac{2}{3}, \mathbb{Z}) = \frac{1}{3} = |-\frac{2}{3} - (-1)|$$

$$\bullet \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R}, d(x, \mathbb{Z}) = \begin{cases} x - [x] & \text{si } x \in [x, [x] + \frac{1}{2}] \\ [x] + 1 - x & \text{si } x \in [[x] + \frac{1}{2}, [x] + 1[ \end{cases}, \text{ car } \forall x \in \mathbb{R}, [x] \leq x < [x] + 1 \text{ où } [x] \text{ est la partie entière de } x.$$

$$\bullet \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R}, d(x, \mathbb{Q}) = 0$$

En effet, comme  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , alors par la caractérisation séquentielle de la densité il existe  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres rationnels qui converge vers  $x$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq d(x, \mathbb{Q}) = \inf_{a \in \mathbb{Q}} |x - a| \leq |x - r_n|$

Par passage à la limite, on en déduit que  $d(x, \mathbb{Q}) = 0$   $\square$

**Remarque 5.**

- On dit que la distance de  $x$  à  $A$  est atteinte s'il existe  $a_0 \in A$  tel que  $d(x, A) = d(x, a_0) = ||x - a_0||$ .
- En général la distance de  $x$  à  $A$  n'est pas atteinte, comme le montre l'exemple suivant :  $d(0, ]1, 2]) = 1$  et  $\forall a \in ]1, 2[, d(0, a) = |a - 0| = a > 1$ .
- On a  $x \in A \implies d(x, A) = 0$  et en général l'implication indirecte est fautive, comme le montre les exemples suivants :  $d(0, ]0, 1]) = 0$  et  $0 \notin ]0, 1]$  et  $d(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = 0$  et  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

**6) Normes équivalentes****Définition 8 (Normes équivalentes).**

Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur  $E$ , on dit que  $N_1$  est équivalente à  $N_2$  s'il existe deux constantes  $\alpha, \beta > 0$  tel que

$$\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

On note  $N_1 \sim N_2$ .

**Remarque 6.**

$\sim$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de  $E$ .

**Exercice 5.**

① Montrer que pour tout  $X \in \mathbb{K}^n$ ,  $\|X\|_\infty \leq \|X\|_1 \leq \sqrt{n}\|X\|_2 \leq n\|X\|_\infty$ .

② En déduire que deux normes quelconques de  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont équivalentes sur  $\mathbb{K}^n$ .

**Solution**

① Soit  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ , on rappelle que

$$\|X\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \|X\|_2 = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \|X\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

• Il existe  $k_0 \in [1, n]$ , tel que  $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = |x_{k_0}| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| = \|X\|_1$ .

• Par application de l'inégalité de Cauchy Schwartz, on a

$$\|X\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| = \sum_{k=1}^n 1 \times |x_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n 1^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} = \sqrt{n} \|X\|_2$$

•  $\sqrt{n} \|X\|_2 = \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n (\|X\|_\infty)^2} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} (\|X\|_\infty)^2 = n \|X\|_\infty$ .

on en déduit que pour tout  $X \in \mathbb{K}^n$ ,  $\|X\|_\infty \leq \|X\|_1 \leq \sqrt{n}\|X\|_2 \leq n\|X\|_\infty$ .

② D'après la question précédente, pour tout  $X \in \mathbb{K}^n$ ,  $\begin{cases} \|X\|_\infty \leq \|X\|_1 \leq n\|X\|_\infty \\ \frac{1}{\sqrt{n}}\|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \leq \sqrt{n}\|X\|_\infty \\ \frac{1}{\sqrt{n}}\|X\|_1 \leq \|X\|_2 \leq \sqrt{n}\|X\|_1 \end{cases}$

Alors deux normes quelconques de  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont équivalentes sur  $\mathbb{K}^n$   $\square$

**Théorème 2.**

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

**Exemple** Toutes les normes sont équivalentes sur  $\mathbb{K}^n$ ,  $M_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\mathbb{K}_n[X]$ .  $\square$

**Remarque 7 (Méthode).**

En dimension infinie, pour établir que deux normes  $N_1$  et  $N_2$  ne sont pas équivalentes sur  $E$ , on cherche une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  telle que

$$\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{ou} \quad \frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

**Exemple** Les normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  ne sont pas équivalentes sur  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$   $\square$

**Solution**

On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\forall t \in [0, 1], f_n(t) = t^n$

On a  $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$  et  $\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(t)|^2 dt = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1}$ , donc  $\|f_n\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$

$\|f_n\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f_n(t)| = \max_{t \in [0, 1]} t^n = 1$

Comme  $\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\sqrt{\frac{1}{2n+1}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,  $\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $\frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_\infty} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors deux normes quelconques de  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  ne sont pas équivalentes sur  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$   $\square$

**7) Boules**

On considère  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

**Définition 9 (Boules ouvertes, fermées et sphères).**

Soit  $a \in E$  un vecteur de  $E$  et  $r > 0$  un réel strictement positif.

① On appelle boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$ , notée  $B(a, r)$  l'ensemble des vecteurs  $x \in E$  tel que  $\|x - a\| < r$

$$B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$$

② On appelle boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$ , notée  $B_f(a, r)$  l'ensemble des vecteurs  $x \in E$  tel que  $\|x - a\| \leq r$

$$B_f(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$$

Lorsque  $r = 1$ , on parle des boules unités.

③ On appelle sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$ , notée  $S(a, r)$  l'ensemble des vecteurs  $x \in E$  tel que  $\|x - a\| = r$

$$S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$$

**Remarque 8.**

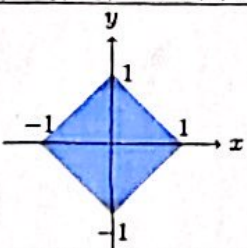
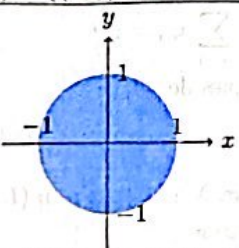
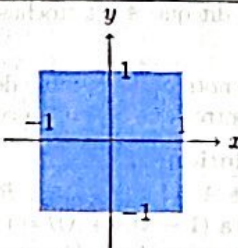
$B_f(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$  ( $B(a, r), S(a, r)$  est une partition de  $B_f(a, r)$ ) et  $S(a, r) = B_f(a, r) \setminus B(a, r)$ .

**Exemples**

① Dans  $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ , pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$ , on a  $B(a, r) = ]a - r, a + r[$ ,  $B_f(a, r) = [a - r, a + r]$ ,  $S(a, r) = \{a - r, a + r\}$ .

② Dans  $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ , pour  $z \in \mathbb{C}$  et  $r > 0$ , on a  $B(z, r) = D(z, r)$  Le disque ouvert de centre  $z$  et de rayon  $r$ ,  
 $B_f(z, r) = D_f(z, r)$  Le disque fermé de centre  $z$  et de rayon  $r$ , et  $S(z, r) = C(z, r)$  le cercle de centre  $z$  et de rayon  $r$ .

③ Boules unités fermées de  $\mathbb{R}^2$ .

| $\ (x, y)\ _1 =  x  +  y $<br>$B_f((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,  x  +  y  \leq 1\}$ | $\ X\ _2 = \sqrt{x^2 + y^2}$<br>$B_f((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ | $\ (x, y)\ _\infty = \max( x ,  y )$<br>$B_f((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,  x ,  y  \leq 1\}$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|              |                |                     |
| Boule unité fermée de $(\mathbb{R}^2, \  \cdot \ _1)$                                          | Boule unité fermée de $(\mathbb{R}^2, \  \cdot \ _2)$                                            | Boule unité fermée de $(\mathbb{R}^2, \  \cdot \ _\infty)$                                              |

**Exercice 6 (Boules de l'espace produit)**

Soit  $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$  des  $K$ -espaces vectoriels normés, on munit  $E = \prod_{1 \leq i \leq p} E_i$  de la norme produit  $N$ .

Soit  $a = (a_1, \dots, a_p) \in E$  et  $r > 0$ . Montrer que  $B(a, r) = \prod_{1 \leq i \leq p} B(a_i, r)$

**Solution**

Soit  $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$ , alors  $x - a = (x_1 - a_1, \dots, x_p - a_p)$ .

$$\begin{aligned} x \in B(a, r) &\iff N(x - a) < r \\ &\iff \max_{0 \leq i \leq p} N_i(x_i - a_i) < r \\ &\iff \forall i \in [1, p], N_i(x_i - a_i) < r \\ &\iff \forall i \in [1, p], x_i \in B(a_i, r) \\ &\iff x = (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{1 \leq i \leq p} B(a_i, r) \end{aligned}$$

On en déduit alors que  $B(a, r) = \prod_{1 \leq i \leq p} B(a_i, r) \boxtimes$

**Exercice 7 (Boules et normes équivalentes)**

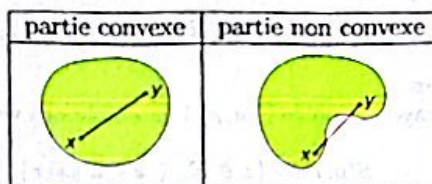
Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur  $E$ .

Soit  $r > 0$ , montrer que  $\forall x \in E, N_2(x) \leq r N_1(x) \iff B_{f, N_1}(0, 1) \subset B_{f, N_2}(0, r)$

avec  $B_{f,N_1}(0,1)$  est la boule fermée unité de  $(E, N_1)$  et  $B_{f,N_2}(0,r)$  est la boule fermée de centre 0 et de rayon  $r$  de  $(E, N_1)$ .  
 ② Montrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes si, et seulement si la boule fermée unité de  $(E, N_1)$  (resp.  $(E, N_2)$ ) est inclus dans une boule fermée de centre 0 de  $(E, N_2)$  (resp.  $(E, N_1)$ ).

#### Définition 10 (Parties convexes).

Une partie  $A$  de  $E$  est dite convexe si pour tout  $x, y \in A$  et  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$ .  
 Autrement dit, pour tout  $x, y \in A$ , le segment reliant  $x$  et  $y$  est inclus dans  $A$ .



#### Proposition 4.

Les boules ouvertes et fermées sont des parties convexes.

#### Remarque 9.

Les sphères ne sont pas convexes.

**Preuve :** Soit  $(a, r) \in E \times ]0, +\infty[$  et  $u$  un vecteur unitaire, on pose  $x = a + ru \in S(a, r)$  et  $y = a - ru \in S(a, r)$ , pour  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $(1 - \lambda)x + \lambda y = a \notin S(a, r)$ , donc  $S(a, r)$  n'est pas convexe.  $\square$

#### Exercice 8 (L'ensemble des matrices stochastiques est un convexe)

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

On dit que  $A$  est stochastique si  $\begin{cases} \forall i, j \in [1, p] \quad a_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in [1, p] \quad \sum_{j=1}^p a_{i,j} = 1 \end{cases}$

On note  $\mathcal{S}_p$  l'ensemble des matrices stochastiques de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .  
 Montrer que  $\mathcal{S}_p$  est un convexe  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

#### Solution

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ ,  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{S}_p$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . a-t-on  $(1 - \lambda)A + \lambda B \in \mathcal{S}_p$

On a  $(1 - \lambda)A + \lambda B = ((1 - \lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$

Soit  $i, j \in [1, p]$ ,  $(1 - \lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j} \geq 0$

Soit  $i \in [1, p]$ ,  $\sum_{j=1}^p ((1 - \lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j}) = (1 - \lambda) \sum_{j=1}^p a_{i,j} + \lambda \sum_{j=1}^p b_{i,j} = (1 - \lambda) \times 1 + \lambda \times 1 = 1$ .

Donc  $(1 - \lambda)A + \lambda B \in \mathcal{S}_p$ .  $\square$

#### 8) Bornitude

On considère  $(E, \| \cdot \|)$  un espace vectoriel normé.

#### Définition 11 (Parties bornées).

Une partie  $A$  de  $E$  est dite bornée s'il existe une constante positive  $M \geq 0$  telle que  $\forall a \in A$ ,  $\| a \| \leq M$ .

#### Remarque 10 (Bornitude et boules).

- Les boules et les sphères sont des parties bornées.
- $A$  est bornée  $\iff A$  est inclus dans une boule fermée (ou ouverte).

#### Proposition 5 (Invariance par des normes équivalentes).

Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux normes équivalentes sur  $E$  et  $A$  une partie de  $E$ , alors

$$A \text{ est bornée pour } N_1 \iff A \text{ est bornée pour } N_2$$

En particulier, en dimension finie,  $A$  être bornée ne dépend pas de la norme choisie.

**Preuve :** Comme  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes, alors il existe deux constantes  $\alpha, \beta > 0$  tel que  $\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$   
 Donc

$$\begin{aligned} A \text{ est bornée pour } N_1 &\iff \exists M \geq 0, \forall a \in A, N_1(a) \leq M \\ &\implies \exists M \geq 0, \forall a \in A, N_2(a) \leq \beta M \\ &\implies \exists M' \geq 0, \forall a \in A, N_2(a) \leq M' \quad (M' = \beta M \geq 0) \\ &\implies A \text{ est bornée pour } N_2 \end{aligned}$$

L'implication indirecte est similaire à la précédente  $\square$

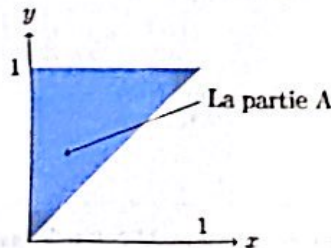
**Proposition 6 (Méthode pour démontrer une partie non bornée).**

Une partie  $A$  de  $E$  n'est pas bornée  $\iff$  il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  telle que  $\|x_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

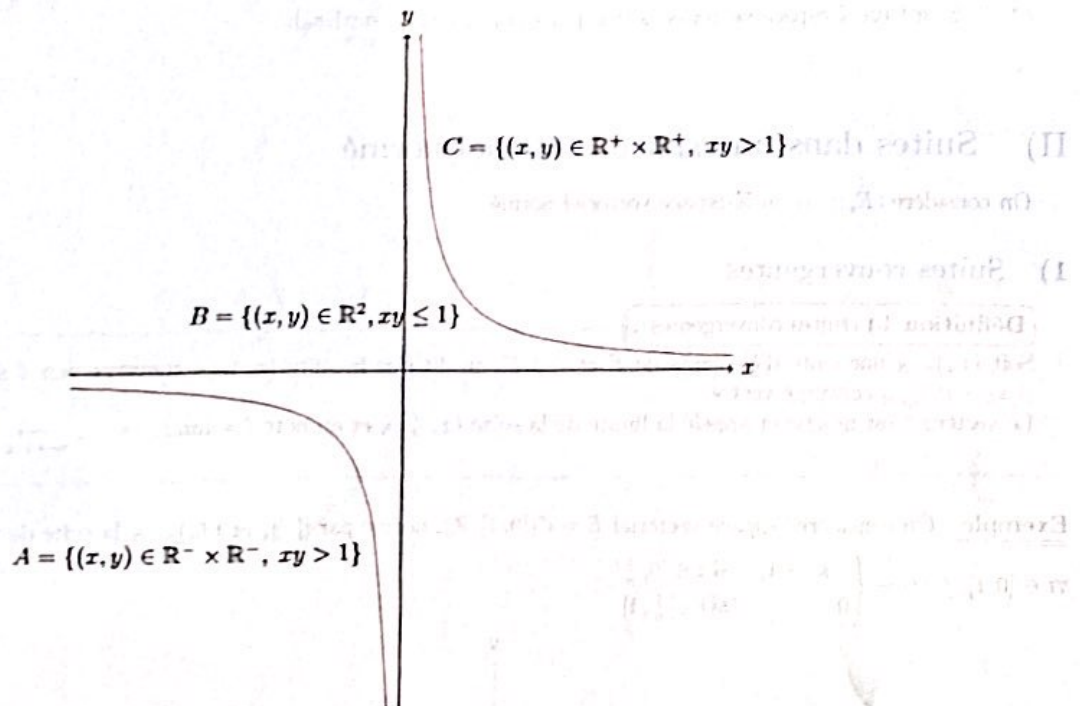
### Exemples

① Dans  $\mathbb{R}^2$ ,

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq 1\}$  est bornée, car  $\forall (x, y) \in A, \|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|) = \max(x, y) = y \leq 1$ .



- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \leq 1\}$  n'est pas bornée, car  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((n, 0))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $B$  et  $\|w_n\|_\infty = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .  
 Géométriquement, la courbe d'équation  $y = \frac{1}{x}$  divise le plan en trois parties non bornées et disjointes  $A, B$  et  $C$ .



Dans  $M_p(\mathbb{R})$ .

Le groupe orthogonal  $O_p(\mathbb{R}) = \{M \in M_p(\mathbb{R}), {}^tMM = I_p\}$  est bornée, car  $\forall M \in O_p(\mathbb{R}), \|M\|_\infty = \sqrt{\text{Tr}({}^tMM)} = \sqrt{p} \leq \sqrt{p}$  constante, ne dépend pas de la matrice  $M$ .

Le groupe spécial linéaire  $SL_p(\mathbb{R}) = \{M \in M_p(\mathbb{R}), \det(M) = 1\}$  n'est pas bornée, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $M_n = I_p + nE_{1,p}$ ,  $\det(M_n) = 1$  (car  $M_n$  est une matrice triangulaire supérieure de diagonale formée par des 1), donc  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite

d'éléments de  $SL_p(\mathbb{R})$  et  $N_\infty(M) = \max_{1 \leq i, j \leq p} |m_{i,j}| = \max(1, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

•  $\mathcal{N}_p$  L'ensemble des matrices nilpotentes de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  n'est pas bornée. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $M_n = nE_{1,p}$ , on a  $M_n^2 = n^2 E_{1,p} E_{1,p} = n^2 \delta_{p,1} E_{1,p} = 0$ , donc  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{N}_p$  et  $N_\infty(M) = \max_{1 \leq i, j \leq p} |m_{i,j}| = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

### Définition 12 (applications bornées).

Une application  $f : X \rightarrow E$  définie sur un ensemble  $X$  à valeurs dans l'espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est bornée s'il existe  $M \geq 0$  telle que  $\forall x \in X, \|f(x)\| \leq M$ .

Autrement dit  $f$  est bornée si, et seulement si, la partie  $f(X)$  de  $E$  est bornée.

On note  $\mathcal{B}(X, E)$  l'ensemble des applications bornées sur  $X$  à valeurs dans  $E$ .

**Exemple** L'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$   
 $x \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$  est bornée.

En effet pour tout  $x \in \mathbb{R}, \|f(x)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x) + (-\sin(x))^2 + \cos^2(x)} = \sqrt{2} \quad \square$

### Proposition 7.

$\mathcal{B}(X, E)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé par  $\|f\|_\infty = \sup_{t \in X} \|f(t)\|$ .

### Définition 13 (Suites bornées).

Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  est dite bornée s'il existe  $M \geq 0$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$ .

On note  $\ell^\infty(\mathbb{N}, E)$  l'ensemble des suites bornées d'éléments de  $E$ .

### Proposition 8.

$\ell^\infty(\mathbb{N}, E)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé par  $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$ .

## II) Suites dans un espace vectoriel normé

On considère  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

### 1) Suites convergentes

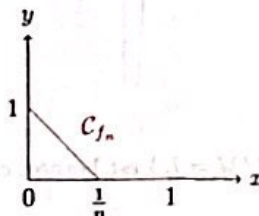
#### Définition 14 (suites convergentes).

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  et  $\ell \in E$ , on dit que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  si la suite réelle positive  $(\|x_n - \ell\|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

Le vecteur  $\ell$  est unique et appelé la limite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et on note  $\ell = \lim x_n$  ou  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

**Exemple** On considère l'espace vectoriel  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , normé par  $\|\cdot\|_1$  et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définie par

$$\forall t \in [0, 1], f_n(t) = \begin{cases} -nt + 1, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & \text{si } t \in ]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$



Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(t) dt + \underbrace{\int_{\frac{1}{n}}^1 f_n(t) dt}_{=0} = \int_0^{\frac{1}{n}} (-nt + 1) dt = \left[ -n \frac{t^2}{2} + t \right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n}$ .

Donc  $\|f_n - 0\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , ainsi  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la fonction nulle dans  $(E, \|\cdot\|_1)$ .

Remarquons que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f_n(t)| = \sup_{t \in [0,1]} f_n(t) = 1 \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers la fonction nulle dans  $(E, \|\cdot\|_\infty)$ . (elle est divergente dans  $(E, \|\cdot\|_\infty)$ )

On conclut que la convergence d'une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé  $E$ , dépend de la norme choisie sur  $E$ , cependant on a le résultat suivant :

**Proposition 9 (Invariance par des normes équivalentes).**

Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux normes équivalentes sur  $E$  et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments et  $\ell \in E$ , alors

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \text{ pour } N_1 \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \text{ pour } N_2$$

En particulier, en dimension finie, la convergence d'une suite ne dépend pas de la norme choisie.

**Preuve :** Comme  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes, alors il existe deux constantes  $\alpha, \beta > 0$  tel que  $\forall x \in E$ ,  $\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha N_1(x_n - \ell) \leq N_2(x_n - \ell) \leq \beta N_1(x_n - \ell)$ , donc  $0 \leq N_2(x_n - \ell) \leq \beta N_1(x_n - \ell)$  et  $0 \leq N_1(x_n - \ell) \leq \frac{1}{\alpha} N_2(x_n - \ell)$ . En appliquant, le théorème de gendarmes dans  $\mathbb{R}$ , on en déduit le résultat annoncé.

**Proposition 10.**

Toute suite convergente est bornée.

**Proposition 11 (Opérations algébriques).**

Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites d'éléments de  $E$  et  $\ell, \ell' \in E$ .

① Si  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$  et  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell'$ , alors  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ,  $\alpha x_n + \beta y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha \ell + \beta \ell'$ .

② Si  $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$  et  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ , alors  $\lambda_n x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \ell$  où  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

③ Si de plus  $(E, +, \times, \cdot)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre normée, alors  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$  et  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell' \implies x_n \times y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \times \ell'$ .

**Proposition 12 (Caractérisation en dimension finie).**

On suppose que  $E$  est de dimension finie  $p$  et  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ .

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  et  $\ell \in E$ .

On écrit  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n = \sum_{k=1}^p \alpha_{k,n} e_k$  et  $\ell = \sum_{k=1}^p \ell_k e_k$ . Alors

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \iff \forall k \in [1, p], (\alpha_{k,n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell_k$$

Dans ce cas,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sum_{k=1}^p \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_{k,n} \right) e_k$$

**Application 1 (Convergence dans  $M_{p,q}(\mathbb{K})$ ).**

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices de  $M_{p,q}(\mathbb{K})$  et  $A \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ .

On note  $A_n = (a_{i,j}^{(n)})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$  et  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$  désigne le coefficient d'indice  $(i, j)$  de la matrice  $A_n$ . Alors

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } A \iff \forall (i, j) \in [1, p] \times [1, q], (a_{i,j}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } a_{i,j}$$

Dans ce cas,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{i,j}^{(n)} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$$

**Exemple**  $A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \\ -1 & \arctan(n) \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$  ☐

**Proposition 13 (Convergence dans l'espace produit).**

Soient  $E_1, \dots, E_p$  des  $K$ -espace vectoriel normé, on munit  $E = E_1 \times \dots \times E_p$  de la norme produit.

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  et  $\ell \in E$ .

On écrit  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (\alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{p,n})$  et  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ . Alors

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \iff \forall k \in [1, p], (\alpha_{k,n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell_k$$

Dans ce cas,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_{1,n}, \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_{p,n} \right)$$

**Exemple**  $x_n = (n \sin(\frac{1}{n}), \arctan(n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell = (1, \frac{\pi}{2}).$  ☐

## 2) Suites extraites et valeurs d'adhérences

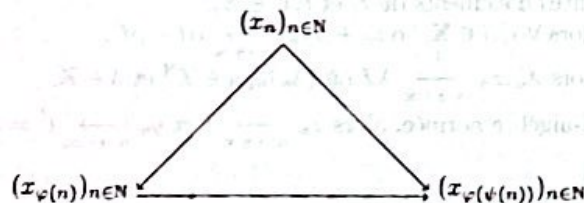
**Définition 15 (Suite extraite).**

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ , on appelle sous suite (ou suite extraite) de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  toute suite de la forme  $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application strictement croissante.

**Remarque 11.**

① Soit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application strictement croissante, alors  $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$ .

② Soient  $\varphi, \psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  deux applications strictement croissantes, alors



**Proposition 14.**

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  qui converge vers  $\ell \in E$ , alors toutes suites extraites de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ .

### Exercice 9 (Suites périodiques)

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite  $p$ -périodique d'éléments de  $E$  ( $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+p} = x_n$ )

Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente  $\iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.

**Solution**

L'implication indirecte est triviale, montrons l'autre implication.

Supposons que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ .

Soit  $m \in \mathbb{N}$ , l'applications  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   $n \mapsto p \cdot n + m$  est strictement croissante, donc la sous suite  $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ .

D'autre part, comme  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est  $p$ -périodique, alors  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{\varphi(n)} = x_{p \cdot n + m} = x_m \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_m$

Alors, par unicité de la limite, on en déduit que  $\forall m \in \mathbb{N}, x_m = \ell$ , ainsi  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante ☐

**Corollaire 1 (Méthode pour démontrer qu'une suite est divergente).**

Pour démontrer qu'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  est divergente, on cherche :

1. une sous suite divergente de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

ou

2. deux sous suites de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui convergent vers des limites différentes.

**Exemple** La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_n = (-1)^n$  est divergente, car  $x_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  et  $x_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1.$  ☐

**Proposition 15.**

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  et  $\ell \in E$ , alors

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \iff (x_{2n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ convergent vers } \ell$$

**Exercice 10 (Séries alternées)**

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle positive décroissante et converge vers 0.

Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$  est convergente.

**Définition 16 (Valeurs d'adhérence).**

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  et  $\ell \in E$ , on dit que  $\ell$  est une valeur d'adhérence de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'il existe une sous suite  $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $\ell$ .

**Proposition 16.**

- ① Toute suite convergente admet une et une seule valeur d'adhérence.
- ② Toute suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.
- ③ Toute suite n'ayant pas de valeur d'adhérence est divergente.

**Remarque 12.**

En général, une suite admet une seule valeur d'adhérence n'est pas nécessairement convergente, comme la montre l'exemple suivant : La suite réelle  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_{2n} = n$  et  $x_{2n+1} = \frac{1}{n+1}$  est divergente, car la sous suite  $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente et admet 0 comme seule valeur d'adhérence.

**Théorème 3 (De Bolzano-Weierstrass).**

De toute suite bornée d'un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$ , on peut extraire une sous suite convergente dans  $E$ . Autrement dit : toute suite bornée d'un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$ , admet au moins une valeur d'adhérence dans  $E$ .

**Remarque 13.**

En général le théorème de Bolzano-Weierstrass n'est pas valable en dimension infinie, comme le montre l'exercice suivant :

**Exercice 11**

On considère l'espace vectoriel  $E = \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{C})$  normé par  $\| \cdot \|_\infty$  et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  définie par  $\forall t \in [0, \pi], f_n(t) = e^{int}$ .

- ① Soit  $n, m \in \mathbb{N}$  tel que  $n \neq m$ , déterminer  $\|f_n\|_\infty$  et  $\|f_n - f_m\|_\infty$ .
- ② En déduire que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et n'a pas de valeur d'adhérence.

**Solution**

- ① Soit  $n, m \in \mathbb{N}$  tel que  $n \neq m$ ,
  - Pour tout  $t \in [0, \pi], |f_n(t)| = |e^{int}| = 1$ , alors  $\|f_n\|_\infty = 1$ .
  - Pour tout  $t \in [0, \pi], f_n(t) - f_m(t) = e^{int} - e^{imt} = e^{i\frac{n+m}{2}t} (e^{i\frac{n-m}{2}t} - e^{-i\frac{n-m}{2}t}) = e^{i\frac{n+m}{2}t} \times 2i \sin\left(\frac{n-m}{2}t\right)$

$$\text{Donc } \|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{t \in [0, \pi]} |f_n(t) - f_m(t)| = \sup_{t \in [0, \pi]} |e^{i\frac{n+m}{2}t} \times 2i \sin\left(\frac{n-m}{2}t\right)| = \sup_{t \in [0, \pi]} 2 \left| \sin\left(\frac{n-m}{2}t\right) \right| = 2$$

(atteint en  $\frac{\pi}{n-m} \in [0, \pi]$ ).

- ② Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty = 1$ , alors  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

Supposons que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une valeur d'adhérence  $f \in E$ , alors il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f$ .

D'après la question précédente,  $\forall n \in \mathbb{N}, (*) \|f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n+1)}\|_\infty = 2$ , car  $\varphi(n+1) \neq \varphi(n)$ .

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans  $(*)$ , on en déduit que  $0 = \|f - f\|_\infty = 2$  ce qui est impossible  $\square$



•  $]a, +\infty[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ .

En effet : soit  $x \in ]a, +\infty[$ , pour  $r = x - a$ ,  $|x - r, x + r[ \subset ]a, +\infty[$ .

Plus généralement, tout intervalle ouvert est un ouvert de  $\mathbb{R}$ .

### Proposition 19.

- ①  $\emptyset$  et  $E$  sont des ouverts de  $E$ .
- ② Une réunion quelconque d'ouverts de  $E$  est un ouvert de  $E$ .
- ③ Une intersection finie d'ouverts de  $E$  est un ouvert de  $E$ .

**Exemple**  $]0, 1[ \cup ]2, +\infty[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ .  $\square$

### Remarque 18.

Une intersection quelconque d'ouverts de  $E$  n'est pas nécessairement un ouvert de  $E$ , comme le montre l'exemple suivant :

$E = \mathbb{R}$ ,  $\forall n \geq 1, \mathcal{O}_n = ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{O}_n = \{0\}$  n'est pas un ouvert de  $\mathbb{R}$ .

### Proposition 20 (produit fini d'ouverts).

Soit  $E_1, \dots, E_p$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

Si  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_p$  des ouverts respectifs de  $E_1, \dots, E_p$ , alors  $\prod_{k=1}^p \mathcal{O}_k$  est un ouvert de  $\prod_{k=1}^p E_k$  muni de la norme produit.

**Exemple**  $]0, 1[ \times ]2, +\infty[$  et  $]0, 1]^2$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

### Proposition 21.

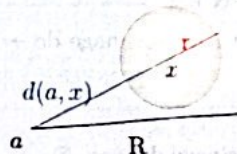
Les boules ouvertes de  $E$  sont des ouverts de  $E$

**Preuve :** Soit  $a \in E$  et  $R > 0$ , montrons que  $B(a, R)$  est un ouvert de  $E$ .

Soit  $x \in B(a, r)$  et  $r = R - \|a - x\|$  (voir la figure ci-dessous). a-t-on  $B(x, r) \subset B(a, R)$ .

Soit  $z \in B(x, r)$ ,

On a  $\|z - a\| = \|(z - x) + (x - a)\| \leq \|z - x\| + \|x - a\| < r + \|x - a\| = R$ , donc  $z \in B(a, R)$ .



$$B(x, r) \subset B(a, R) \implies r \leq R - d(a, x)$$

## 3) Fermés

### Définition 22 (Fermés).

Soit  $F$  une partie de  $E$ . On dit que  $F$  est un fermé de  $E$  si son complémentaire  $C_E^F$  est un ouvert de  $E$ .

### Solution

- ① Soit  $n, m \in \mathbb{N}$  tel que  $m \geq n$ ,  $\|P_m - P_n\|_\infty = \left\| \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k!} X^k \right\|_\infty = \max_{n+1 \leq k \leq m} \left| \frac{1}{k!} \right| = \max_{n+1 \leq k \leq m} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}$ .
- ② Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$ ,  $\frac{1}{(n+1)!} < \varepsilon$ .  
Soit  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ , tel que  $m \geq n \geq N$ ,  $\|P_m - P_n\|_\infty = \frac{1}{(n+1)!} < \varepsilon$ . Donc  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy.
- ③ Par absurde, supposons que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente dans  $E$ , alors il existe  $P = \sum_{k=0}^r \alpha_k X^k \in E$  tel que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $P$ .
- Pour tout  $n > r$ ,  $P_n - P = \sum_{k=0}^r \left( \frac{1}{k!} - \alpha_k \right) X^k + \sum_{k=r+1}^n \frac{1}{k!} X^k = \sum_{k=0}^n \beta_k X^k$  où  $\beta_k = \begin{cases} \frac{1}{k!} - \alpha_k & \text{si } 0 \leq k \leq r \\ \frac{1}{k!} & \text{si } r+1 \leq k \leq n \end{cases}$
- Donc  $\|P_n - P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |\beta_k| \geq |\beta_{r+1}| = \frac{1}{(r+1)!}$ , d'où  $\forall n > r$ ,  $\|P_n - P\|_\infty \geq \frac{1}{(r+1)!}$ , comme  $r$  est constant ne dépend pas de  $n$ , alors par passage à la limite on en déduit que  $0 \geq \frac{1}{(r+1)!}$  ce qui est absurde, donc la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente.  
Comme  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy d'élément de  $E$  et divergente, alors  $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$  n'est pas complet  $\square$

## III) — Éléments de topologie

On considère  $(E, \|\cdot\|)$  un  $K$ -espace vectoriel normé.

### 1) Voisinages

#### Définition 19 (voisinages).

Soit  $V$  une partie de  $E$  et  $x \in E$ . On dit que  $V$  est un voisinage de  $x$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset V$ .  
On note  $\mathcal{V}_E(x)$  l'ensemble des voisinage de  $x$  dans  $E$ .

#### Remarque 16.

- $\mathcal{V}_E(x) \neq \emptyset$ , car  $E \in \mathcal{V}_E(x)$ .
- Si  $N_1$  et  $N_2$  deux normes équivalentes sur  $E$ , alors  $V$  est un voisinage de  $x$  pour  $N_1 \iff V$  est un voisinage de  $x$  pour  $N_2$ .

#### Exemples

- ①  $]0, 1[$  est un voisinage de  $\frac{1}{2}$  car  $]\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}[ = ]\frac{1}{6}, \frac{5}{6}[ \subset ]0, 1[$ .  
②  $]0, 1[$  n'est pas un voisinage de 1 car  $\forall r > 0$ ,  $]1 - r, 1 + r[ \not\subset ]0, 1[$ .

#### Définition 20 (Voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ ).

Soit  $V$  une partie de  $\mathbb{R}$ , on dit que  $V$  est un voisinage de  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) s'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $]\alpha, +\infty[ \subset V$  (resp.  $]-\infty, \alpha[ \subset V$ ).

Exemple  $]1, +\infty[$  et  $]1, +\infty[$  sont des voisinage de  $+\infty$ .  $\square$

### 2) Ouverts

#### Définition 21 (Ouverts).

Soit  $\mathcal{O}$  une partie de  $E$ . On dit que  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $E$  si  $\forall x \in \mathcal{O}$ ,  $\exists r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset \mathcal{O}$ .

#### Remarque 17.

- $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $E \iff \mathcal{O}$  est un voisinage de chacun de ses points.
- Si  $N_1$  et  $N_2$  deux normes équivalentes sur  $E$ , alors  $\mathcal{O}$  est un ouvert pour  $N_1 \iff \mathcal{O}$  est un ouvert pour  $N_2$ .

#### Exemples

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  tel que  $a < b$ ,

- $]a, b[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ .

En effet : soit  $x \in ]a, b[$ , pour  $r = \min(x - a, b - x)$ ,  $]x - r, x + r[ \subset ]a, b[$ .

•  $]a, +\infty[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ .

En effet : soit  $x \in ]a, +\infty[$ , pour  $r = x - a$ ,  $]x - r, x + r[ \subset ]a, +\infty[$ .

Plus généralement, tout intervalle ouvert est un ouvert de  $\mathbb{R}$ .

### Proposition 19.

- ①  $\emptyset$  et  $E$  sont des ouverts de  $E$ .
- ② Une réunion quelconque d'ouverts de  $E$  est un ouvert de  $E$ .
- ③ Une intersection finie d'ouverts de  $E$  est un ouvert de  $E$ .

**Exemple**  $]0, 1[ \cup ]2, +\infty[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ .  $\square$

### Remarque 18.

Une intersection quelconque d'ouverts de  $E$  n'est pas nécessairement un ouvert de  $E$ , comme le montre l'exemple suivant :

$E = \mathbb{R}$ ,  $\forall n \geq 1, O_n = ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $\bigcap_{n \geq 1} O_n = \{0\}$  n'est pas un ouvert de  $\mathbb{R}$ .

### Proposition 20 (produit fini d'ouverts).

Soit  $E_1, \dots, E_p$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

Si  $O_1, \dots, O_p$  des ouverts respectifs de  $E_1, \dots, E_p$ , alors  $\prod_{k=1}^p O_k$  est un ouvert de  $\prod_{k=1}^p E_k$  muni de la norme produit.

**Exemple**  $]0, 1[ \times ]2, +\infty[$  et  $]0, 1[^2$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

### Proposition 21.

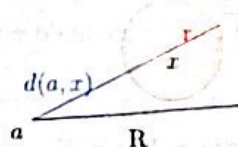
Les boules ouvertes de  $E$  sont des ouverts de  $E$ .

**Preuve :** Soit  $a \in E$  et  $R > 0$ , montrons que  $B(a, R)$  est un ouvert de  $E$ .

Soit  $x \in B(a, r)$  et  $r = R - \|a - x\|$  (voir la figure ci-dessous). a-t-on  $B(x, r) \subset B(a, R)$ .

Soit  $z \in B(x, r)$ ,

On a  $\|z - a\| = \|(z - x) + (x - a)\| \leq \|z - x\| + \|x - a\| < r + \|x - a\| = R$ , donc  $z \in B(a, R)$ .



$$B(x, r) \subset B(a, R) \implies r \leq R - d(a, x)$$

## 3) Fermés

### Définition 22 (Fermés).

Soit  $F$  une partie de  $E$ . On dit que  $F$  est un fermé de  $E$  si son complémentaire  $C_E^F$  est un ouvert de  $E$ .

**Exercice 13 (L'ensemble des matrices stochastiques est un convexe)**Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .On dit que  $A$  est stochastique si 
$$\begin{cases} \forall i, j \in [1, p] \quad a_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in [1, p] \quad \sum_{j=1}^p a_{i,j} = 1 \end{cases}$$
On note  $S_p$  l'ensemble des matrices stochastiques de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .  
Montrer que  $S_p$  est un fermé  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .**Solution**Montrons que  $S_p$  est un fermé  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  par la caractérisation séquentielle.Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $S_p$  qui converge vers  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on écrit  $A_n = (a_{i,j}^{(n)})_{1 \leq i,j \leq p}$ , comme  $A \in S_p$ , alors (\*) 
$$\begin{cases} \forall i, j \in [1, p] \quad a_{i,j}^{(n)} \geq 0 \\ \forall i \in [1, p] \quad \sum_{j=1}^p a_{i,j}^{(n)} = 1 \end{cases}$$
Puisque  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $A$ , alors pour tout  $i, j \in [1, p]$ ,  $(a_{i,j}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $a_{i,j}$  (dans  $\mathbb{R}$ ).En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , dans (\*), on en déduit que 
$$\begin{cases} \forall i, j \in [1, p] \quad a_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in [1, p] \quad \sum_{j=1}^p a_{i,j} = 1 \end{cases}$$
, donc  $A \in S_p$ .  $\square$ **Proposition 25.**

Tout sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé de dimension quelconque est un fermé.

**Exemples**

- $\mathbb{R}_p[X]$  est un fermé de  $\mathbb{R}[X]$ .
- L'espace des matrices diagonales (resp. symétriques, antisymétriques) de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  est un fermé de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

**4) Intérieur****Définition 23 (Intérieur d'une partie).**Soit  $A$  une partie  $E$  et  $x \in E$ .On dit que  $x$  est intérieur à  $A$  s'il existe  $r > 0$ ,  $B(x, r) \subset A$ .On note  $\overset{\circ}{A}$  l'ensemble des points intérieurs à  $A$ .

$$x \in \overset{\circ}{A} \iff \exists r > 0, B(x, r) \subset A$$

**Proposition 26 (propriétés de l'intérieur).**Soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ , alors

- ①  $\overset{\circ}{A} \subset A$ .
- ②  $A \subset B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ .
- ③  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}$  est un ouvert de  $E$ .
- ④  $\overset{\circ}{A} = A \iff A$  est un ouvert de  $E$ .
- ⑤  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$ .
- ⑥  $\overset{\circ}{A}$  le plus grand ouvert contenu dans  $A$ .

**Exemple**  $]0, 1[ = ]0, 1[$  et  $[2, +\infty[ = ]2, +\infty[ \quad \square$ **Proposition 27.**Soit  $a \in E$  et  $r > 0$ .

- ①  $B(a, r) = B(a, r)$ .
- ②  $B_f(a, r) = B(a, r)$ .
- ③  $S(a, r) = \emptyset$ .

### Exercice 14

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel et  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$ , Montrer que  $\bar{F} \neq \emptyset \iff F = E$

#### Solution

$\Leftarrow$  Si  $F = E$ , on sait que  $E$  est un ouvert de  $E$  alors  $F$  l'est, d'après la propriété 4 de la proposition 24, on a  $\bar{F} = F \neq \emptyset$ , car  $F$  est sous espace vectoriel de  $E$ .

$\Rightarrow$  Si  $\bar{F} \neq \emptyset$ , soit  $x \in \bar{F}$ , alors  $\exists r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset F$ .

Soit  $y \in E$  tel que  $y \neq x$ , posons  $z = x + \frac{r}{2\|y-x\|}(y-x)$

On a  $\|z-x\| = \frac{r}{2} < r$ , alors  $z \in B(x, r)$ , donc  $z \in F$ , comme  $y = \left(\frac{2\|y-x\|}{r}\right)z + \left(1 - \frac{2\|y-x\|}{r}\right)x$ ,  $x, z \in F$  et  $F$  est un sous espace vectoriel de  $E$ , alors  $y \in F$ , donc  $\forall y \in E, y \in F$ , alors  $E = F$ .

- Dans  $\mathbb{R}, \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ .
- Dans  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}), D_p(\mathbb{R}) = \emptyset$  où  $D_p(\mathbb{R})$  l'algèbre des matrices diagonales  $\boxtimes$

### 5) Adhérence

#### Définition 24 (Adhérence d'une partie).

Soit  $A$  une partie  $E$  et  $x \in E$ .

On dit que  $x$  est adhérent à  $A$  si  $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

On note  $\bar{A}$  l'ensemble des points adhérents à  $A$ .

$$x \in \bar{A} \iff \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

#### Proposition 28.

Soit  $A$  une partie de  $E$ , alors

$$\textcircled{1} \bar{C_E^A} = C_E^{\bar{A}}.$$

$$\textcircled{2} C_E^{\bar{A}} = C_E^{\bar{A}}.$$

En utilisant la proposition précédente et la proposition 25, on en déduit la :

#### Proposition 29 (propriétés de l'adhérence).

Soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ , alors

- $\textcircled{1} A \subset \bar{A}$ .
- $\textcircled{2} A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}$ .
- $\textcircled{3} \bar{A}$  est un fermé de  $E$
- $\textcircled{4} \bar{\bar{A}} = \bar{A} \iff A$  est un fermé de  $E$ .
- $\textcircled{5} \bar{\bar{A}} = \bar{A}$ .
- $\textcircled{6} \bar{A}$  le plus petit fermé qui contient  $A$ .

**Exemple**  $\overline{[0, 1]} = [0, 1]$  et  $\overline{[2, +\infty[} = [2, +\infty[$ .  $\boxtimes$

#### Proposition 30.

Soit  $a \in E$  et  $r > 0$ .

- $\textcircled{1} \overline{B(a, r)} = B_f(a, r)$ .
- $\textcircled{2} \overline{B_f(a, r)} = B_f(a, r)$ .
- $\textcircled{3} \overline{S(a, r)} = S(a, r)$ .

#### Proposition 31 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence).

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $x \in E$ , alors

$$x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \text{ une suite d'éléments de } A \text{ qui converge vers } x$$

### Exercice 15

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel et  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$ ,

- $\textcircled{1}$  Montrer que  $\bar{F}$  est un sous espace vectoriel de  $E$ .
- $\textcircled{2}$  Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Montrer que  $\bar{H} = H$  ou  $\bar{H} = E$ .

### Solution

① On a  $\bar{F} \neq \emptyset$ , car  $0 \in F \subset \bar{F}$ .

Soit  $x, y \in \bar{F}$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

Alors il existe  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites d'éléments de  $F$  qui convergent respectivement vers  $x$  et  $y$ .

Comme  $F$  est un sous espace vectoriel de  $E$ , alors  $(\alpha x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $F$  qui converge vers  $\alpha x + y \in \bar{F}$ , d'où  $\bar{F}$  est un sous espace vectoriel de  $E$ .

② Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Supposons que  $\bar{H} \neq H$  et montrons que  $\bar{H} = E$ .

Comme  $\bar{H} \neq H$ , alors  $H \subsetneq \bar{H}$ , soit  $x \in \bar{H} \setminus H$ .

Puisque  $H$  est un hyperplan de  $E$  et  $x \notin H$ , alors  $E = H \oplus \text{vect}(x)$ .

Soit  $z \in E$ , alors  $\exists y \in H$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $z = y + \lambda x$ , or  $y \in H \subset \bar{H}$ ,  $x \in \bar{H}$  et  $\bar{H}$  est un sous espace vectoriel de  $E$ , alors  $z \in \bar{H}$ , ainsi  $\bar{H} = E$   $\square$

## 6) Frontière et densité

### Définition 25 (Frontière d'une partie).

Soit  $A$  une partie de  $E$ , on appelle frontière de  $A$ , notée  $\text{Fr}(A)$  définie par

$$\text{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

**Exemple**  $\text{Fr}([0, 1]) = \{0, 1\}$ ,  $\text{Fr}([0, +\infty[) = \{0\}$ ,  $\text{Fr} ]-\infty, +\infty[ = \emptyset$  et  $\text{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$   $\square$

### Remarque 21.

①  $\text{Fr}(A)$  est un fermé de  $E$ .

②  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\text{Fr}(A)$  et  $C_E^{\bar{A}}$  forment une partition de  $E$ .

### Définition 26 (Densité).

Soit  $A, B$  deux parties de  $E$ .

① On dit que  $A$  est dense dans  $E$  si  $\bar{A} = E$ .

② Si  $A \subset B$ , on dit que  $A$  est dense dans  $B$  si  $B \subset \bar{A}$ .

### Proposition 32.

Soit  $A$  une parties de  $E$ .

$$\begin{aligned} A \text{ est dense dans } E &\iff \forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, \exists a \in A, \|x - a\| < \varepsilon \end{aligned}$$

### Proposition 33 (Caractérisation séquentielle de la densité).

Soit  $A$  une parties de  $E$ .

$$A \text{ est dense dans } E \iff \forall x \in E, \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ une suite d'éléments de } E \text{ qui converge vers } x$$

### Exemples

①  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\left(\frac{[10^n x]}{10^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathbb{Q}$  qui converge vers  $x$ .

②  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\left(\frac{[10^n(x-\sqrt{2})]}{10^n} + \sqrt{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  qui converge vers  $x$ .

③  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}^2$ .

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\left(\left(\frac{[10^n x]}{10^n}, \frac{[10^n y]}{10^n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  qui converge vers  $(x, y)$ .

## 7) Topologie relative à une partie

Soit  $A$  une partie de  $E$ .

**Définition 27 (Voisinage relatif à une partie A).**

Soit  $x \in E$ . On appelle voisinage de  $x$  relative à  $A$  tout ensemble de la forme  $V \cap A$  avec  $V$  un voisinage de  $x$  dans  $E$ .

**Exemple**  $]0, \frac{1}{2}[$  est un voisinage de 0 relative à  $A = ]0, 1]$ , car  $]0, \frac{1}{2}[ = ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \cap A$ .  $\square$

**Définition 28 (Ouvert relatif à une partie A).**

On appelle ouvert relative à  $A$  tout ensemble de la forme  $O \cap A$  avec  $O$  un ouvert de  $E$ .

**Exemple**  $] \frac{1}{2}, 1]$  est un ouvert relative à  $A = ]0, 1]$ , car  $] \frac{1}{2}, 1] = ] \frac{1}{2}, 2[ \cap A$ . (mais  $] \frac{1}{2}, 1]$  n'est pas un ouvert de  $\mathbb{R}$ )  $\square$

**Remarque 22.**

Si  $A$  est un ouvert de  $E$ , alors les ouverts relatifs à  $A$  sont les ouverts de  $E$  inclus dans  $A$ .

**Définition 29 (Fermé relative à une partie A).**

On appelle fermé relative à  $A$  tout ensemble de la forme  $F \cap A$  avec  $F$  un fermé de  $E$ .

**Exemple**  $]0, \frac{1}{2}]$  est un fermé relative à  $A = ]0, 1]$ , car  $]0, \frac{1}{2}] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cap A$ . (mais  $]0, \frac{1}{2}]$  n'est pas un fermé de  $\mathbb{R}$ )  $\square$

**Remarque 23.**

Si  $A$  est un fermé de  $E$ , alors les fermés relatifs à  $A$  sont les ouverts de  $E$  inclus dans  $A$ .

## IV) Limites et continuités

Soit  $(E, || \cdot ||_E)$ ,  $(F, || \cdot ||_F)$  et  $(G, || \cdot ||_G)$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

### 1) Limites

**Définition 30 (Limite finie d'une fonction en un point).**

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $f : A \rightarrow F$  et  $a \in \bar{A}$  et  $\ell \in F$ .

On dit que  $f$  admet  $\ell$  comme limite en  $a$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, ||x - a||_E < \alpha \implies ||f(x) - \ell||_F < \varepsilon$$

Dans ce cas  $\ell$  est unique et on note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ .

**Proposition 34 (Méthode pour montrer que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ).**

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $f : A \rightarrow F$  et  $a \in A$  et  $\ell \in F$ .

S'il existe  $V$  un voisinage de  $a$  relative à  $A$  et  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $\begin{cases} \forall x \in V, ||f(x) - \ell||_F \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \end{cases}$

Alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

**Exemple**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$   $\square$

**Solution**

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{|x||y|}{x^2 + y^2} |x| \leq \frac{1}{2} |x| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0, \text{ donc } \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \quad \square$$

**Proposition 35 (Caractérisation séquentielle de la limite).**

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $f: A \rightarrow F$  et  $a \in \bar{A}$  et  $\ell \in F$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \text{pour toute suite } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ d'éléments de } A \text{ qui converge vers } a \text{ la suite } (f(a_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell$$

**Remarque 24 (Méthode pour démontrer de  $f$  n'a pas de limite en  $a$ ).**

Pour montrer que  $f$  n'admet pas de limite en  $a$ , on cherche :

1.  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $A$  telle que  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

ou 2.  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites d'éléments de  $A$  telles que  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers des limites différentes.

**Exemple**  $f: (x, y) \rightarrow \frac{xy}{x^2+y^2}$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .  $\boxtimes$

**Solution**

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \text{ et } f\left(0, \frac{1}{n}\right) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \boxtimes$$

En utilisant la proposition précédente et les propriétés des suites convergentes, on en déduit les propositions suivantes :

**Proposition 36 (Opérations algébriques).**

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $f, g: A \rightarrow F$  et  $a \in \bar{A}$  et  $\ell, \ell' \in F$ .

① Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$ , alors  $\forall \alpha, \beta \in K, \alpha f(x) + \beta g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha \ell + \beta \ell'$ .

② Si  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ , alors  $\varphi(x) \cdot f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \ell$  où  $\varphi: A \rightarrow K$  et  $\lambda \in K$ .

③ Si de plus  $(F, +, \times, \cdot)$  est une  $K$ -algèbre normée, alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell' \implies f(x) \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \times \ell'$ .

**Proposition 37 (Caractérisation en dimension finie).**

On suppose que  $E$  est de dimension finie  $p$  et  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ .

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $f: A \rightarrow F$  et  $a \in \bar{A}$  et  $\ell \in F$ .

On écrit  $\forall x \in A, f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x) e_k$  et  $\ell = \sum_{k=1}^p \ell_k e_k$ . Alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff \forall k \in [1, p], f_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_k$$

Dans ce cas,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sum_{k=1}^p \left( \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) \right) e_k$$

**Exemple**  $f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(x)}{x} & \frac{x \ln(x)}{1-\cos(x)} \end{pmatrix} \xrightarrow{x \rightarrow 0} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \boxtimes$

**Proposition 38 (limite d'une fonction à valeurs dans un espace produit).**

Soient  $E_1, \dots, E_p$  des  $K$ -espace vectoriel normé, on munit  $E = E_1 \times \dots \times E_p$  de la norme produit.

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $f: A \rightarrow F$  et  $a \in \bar{A}$  et  $\ell \in F$ .

On écrit  $\forall x \in A, f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$  et  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ . Alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff \forall k \in [1, p], f_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_k$$

Dans ce cas,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \left( \lim_{x \rightarrow a} f_1(x), \dots, \lim_{x \rightarrow a} f_p(x) \right)$$

**Exemple**  $f(x) = \left( x \ln(x), \frac{\tan(x)}{x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} (0, 1) \quad \boxtimes$

**Proposition 39 (Composition des limites).**

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $f : A \rightarrow F$ ,  $B$  une partie de  $F$  et  $g : B \rightarrow G$  tels que  $f(A) \subset B$ .  
 Soit  $a \in A$  et  $b \in F$  et  $\ell \in G$ .  
 Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell$ .

**Définition 31 (Extensions de la notion de limite).**

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $f : A \rightarrow F$  et  $a \in \bar{A}$  et  $\ell \in F$ .

① Limite de  $f(x)$  lorsque  $\|x\|$  tend vers  $+\infty$  si  $A$  n'est pas bornée :

On dit que  $f$  admet  $\ell$  comme limite en  $a$  quand  $\|x\|$  tend vers  $+\infty$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x\|_E > \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon$$

On note  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

② Limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  si  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$  :

On dit que  $f$  admet  $\ell$  comme limite en  $a$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, x > \alpha \text{ (resp. } x < -\alpha) \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon$$

On note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ )

③ Limite infinie de  $f(x)$  en un point adhérent à  $A$  lorsque  $F = \mathbb{R}$  :

On dit que  $f$  admet  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) comme limite en  $a$  si

$$\forall \beta > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\| < \alpha \Rightarrow f(x) > \beta \text{ (resp. } f(x) < -\beta)$$

On note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ )

**Exemple** Soit  $a \in S(0_E, 1)$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in B(0,1)}} \frac{1}{1 - \|x\|} = +\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in C_E}} \frac{1}{1 - \|x\|} = -\infty$ .  $\square$

**2) Continuités****Définition 32 (Continuité d'une fonction en un point).**

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $f : A \rightarrow F$  et  $a \in A$ .

• On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$$

• On dit que  $f$  est continue sur  $A$  si  $f$  est continue en tout point de  $A$ .

• On note  $\mathcal{C}(A, F)$  l'ensemble des fonctions continues sur  $A$  à valeurs dans  $F$ .

**Proposition 40 (Caractérisation séquentielle de la continuité).**

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $f : A \rightarrow F$  et  $a \in A$ .

$f$  est continue en  $a \iff$  pour toute suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $a$  la suite  $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(a)$

**Exemple**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .  $\square$

**Solution**

On a  $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$  mais  $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$   $\square$

En utilisant les propriétés de la limite d'une fonction en un point, on en déduit les propositions suivantes :

**Proposition 41 (Opérations algébriques).**

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $f, g : A \rightarrow F$  et  $a \in A$ .

- ① Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $a$  (resp. sur  $A$ ), alors  $\forall \alpha, \beta \in K$ ,  $\alpha f + \beta g$  est continue en  $a$  (resp. sur  $A$ ).
- ② Si  $\varphi$  et  $f$  sont continues en  $a$  (resp. sur  $A$ ), alors  $\varphi \times f$  est continue en  $a$  (resp. sur  $A$ ). ( $\varphi : A \rightarrow K$ ).
- ③ Si de plus  $(F, +, \times, \cdot)$  est une  $K$ -algèbre normée et  $f$  et  $g$  sont continues en  $a$  (resp. sur  $A$ ), alors  $f \times g$  est continue en  $a$  (resp. sur  $A$ ).

**Corollaire 3.**

$C(A, F)$  est un  $K$ -espace vectoriel.

**Proposition 42 (Caractérisation en dimension finie).**

On suppose que  $E$  est de dimension finie  $p$  et  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ .

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $f : A \rightarrow F$  et  $a \in A$ .

On écrit  $\forall x \in A$ ,  $f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x) e_k$ . Alors

$$f \text{ est continue en } a \text{ (resp. sur } A) \iff \forall k \in [1, p], f_k \text{ est continue en } a \text{ (resp. sur } A)$$

**Exemple**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$   
 $\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Proposition 43 (Continuité d'une fonction à valeurs dans un espace produit).**

Soient  $E_1, \dots, E_p$  des  $K$ -espace vectoriel normé, on munit  $E = E_1 \times \dots \times E_p$  de la norme produit.

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $f : A \rightarrow F$  et  $a \in A$ .

On écrit  $\forall x \in A$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ . Alors

$$f \text{ est continue en } a \text{ (resp. sur } A) \iff \forall k \in [1, p], f_k \text{ est continue en } a \text{ (resp. sur } A)$$

**Exemple**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $x \mapsto (\arctan(x), \cos(x))$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Proposition 44 (Composition des fonctions continues).**

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $f : A \rightarrow F$ ,  $B$  une partie de  $F$  et  $g : B \rightarrow G$  tels que  $f(A) \subset B$  et  $a \in A$ .

Si  $f$  est continue en  $a$  (resp. sur  $A$ ) et  $g$  est continue en  $f(a)$  (resp. sur  $f(A)$ ), alors  $g \circ f$  est continue en  $a$ .

**Exemple** Si  $f : A \rightarrow F$  est continue sur  $A$ , alors  $x \mapsto \|f(x)\|_F$  est continue sur  $A$ .  $\square$

**3) Applications lipschitziennes****Définition 33 (Applications lipschitziennes).**

Soit  $f : A \rightarrow F$  et  $k \geq 0$ .

- On dit  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $A$  si  $\forall x, y \in A$ ,  $\|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E$ .
- On dit que  $f$  est lipschitzienne sur  $A$  s'il existe  $k \geq 0$  tel que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $A$ .

**Exemples**

①  $t \mapsto \cos(t)$  et  $t \mapsto \sin(t)$  sont 1-lipschitziennes sur  $\mathbb{R}$ .

En effet, soit  $x, y \in \mathbb{R}$  tel que  $x < y$ .

Comme  $t \mapsto \cos(t)$  est continue sur  $[x, y]$  et dérivable sur  $]x, y[$ , d'après le théorème des accroissements finis,  $\exists c_{x,y} \in ]x, y[$  tel que  $\cos(x) - \cos(y) = \cos'(c_{x,y})(x - y) = -\sin(c_{x,y})(x - y)$ , donc  $|\cos(x) - \cos(y)| = |-\sin(c_{x,y})| |x - y| \leq |x - y|$ .

②  $x \mapsto \|x\|$  est 1-lipschitzienne sur  $E$ , car  $\forall x, y \in E$ ,  $|||x|| - ||y||| \leq \|x - y\|$ .

③ Soit  $A$  une partie de  $E$ ,  $x \mapsto d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$  est 1-lipschitzienne sur  $E$ .

Soit  $x, y \in E$ , donc  $\forall a \in A$ ,  $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\| \leq \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$   
d'où  $\forall a \in A$ ,  $d(x, A) - \|x - y\| \leq \|y - a\|$ ; ainsi  $d(x, A) - \|x - y\|$  est un minorant de  $\{\|y - a\| \mid a \in A\}$ , puisque  $d(y, A) = \inf_{a \in A} \|y - a\|$   
est le plus grand minorant de cet ensemble, alors  $d(x, A) - \|x - y\| \leq d(y, A)$ , par suite  $d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$ .  
Comme  $x$  et  $y$  jouent des rôles symétriques, alors  $d(y, A) - d(x, A) \leq \|y - x\| = \|x - y\|$ .  
Finalement  $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$ .

**Proposition 45.**

Toute application lipschitzienne sur  $A$  est continue sur  $A$ .

**Remarque 25.**

Une application continue sur  $A$  n'est pas nécessairement lipschitzienne sur  $A$ , comme le montre l'exemple suivant :

$f : x \mapsto e^x$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $f$  n'est pas lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ .  
par absurde si  $f$  est  $k$ -lipschitzienne, alors  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,  $|e^x - e^y| \leq k|x - y|$   
En particulier,  $\forall x > 0$ ,  $\frac{e^x - 1}{x} \leq k$  ce qui est impossible avec  $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Exercice 16**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $I$ .

Montrer que :  $f$  est lipschitzienne sur  $I \iff f'$  bornée sur  $I$ .

**Exercice 17**

On note  $Lip(A, F)$  l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur  $A$  à valeurs dans  $F$ .

① Montrer que  $Lip(A, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

② Soit  $f \in Lip(A, F)$  et  $a \in A$ , on pose  $\|f\| = \|f(a)\|_F + \sup_{\substack{x, y \in A \\ x \neq y}} \frac{\|f(x) - f(y)\|_F}{\|x - y\|_E}$ .

Montrer que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $Lip(A, F)$ .

**4) Applications uniformément continues**

**Définition 34 (Applications uniformément continues).**

Soit  $f : A \rightarrow F$ , on dit  $f$  est uniformément continue sur  $A$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in A, \|x - y\|_E < \alpha \implies \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon$$

**Exemple** L'application  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $t \mapsto \sqrt{t}$  est uniformément continue, car  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ ,  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$  (on prend alors  $\alpha = \varepsilon^2$ ).  $\square$

**Proposition 46 (Caractérisation séquentielle de la continuité uniforme).**

Soit  $f : A \rightarrow F$ , alors

$$f \text{ est uniformément continue sur } A \iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \text{ si } x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ alors } f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**Exemple** L'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $t \mapsto t^2$  n'est pas uniformément continue, car  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  
 $f(\sqrt{n+1}) - f(\sqrt{n}) = 1 \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .  $\square$

**Proposition 47.**

- ① Toute application uniformément continue est continue.
- ② Toute application lipschitzienne est uniformément continue.

**Remarque 26.**

- Une application continue n'est pas nécessairement uniformément continue, comme le montre l'exemple suivant

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f: t \mapsto t^2$$

- Une application uniformément continue n'est pas nécessairement lipschitzienne, comme le montre l'exemple suivant

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ f: t \mapsto \sqrt{t}$$

Proposition 10.

**5) Applications linéaires continues****Théorème 5 (Caractérisation des applications linéaires continues).**

Soit  $f: E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors sont équivalentes :

- ①  $f$  est continue sur  $E$
- ②  $f$  est continue en  $0_E$
- ③  $f$  est bornée sur  $E$
- ④  $\exists c \geq 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq c\|x\|_E$ .
- ⑤  $f$  est lipschitzienne sur  $E$ .

On note  $\mathcal{L}_c(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires continues sur  $E$  à valeurs dans  $F$ .

Exercice 18

**Remarque 27 (Méthode).**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$

- Pour montrer que  $f$  est continue, on cherche  $c \geq 0$  tel que  $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq c\|x\|_E$ .
- Pour montrer que  $f$  n'est pas continue, on cherche  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  telle que  $\frac{\|f(x_n)\|_F}{\|x_n\|_E} \rightarrow +\infty$ .

**Exemples**

- ① Soit  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  normé par  $\|\cdot\|_\infty$ , l'application  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f: \varphi \mapsto \int_a^b \varphi(t) dt$  est continue.

En effet,  $\forall \varphi \in E, |f(\varphi)| = \left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt \leq \int_a^b \|\varphi\|_\infty dt = (b-a)\|\varphi\|_\infty$  ( $c = b-a \geq 0$ ).

- ② Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  normé par  $\|\cdot\|_\infty$  où  $P = \sum_{k=0}^r a_k X^k, \|P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq r} |a_k|$ , l'application  $f: E \rightarrow E$  définie par  $f: P \mapsto P'$  n'est pas continue.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}, P_n = X^n \in E$  et  $\frac{\|f(P_n)\|_\infty}{\|P_n\|_\infty} = \frac{\|nX^{n-1}\|_\infty}{\|X^n\|_\infty} = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Exercice 18**

Soit  $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ , normé par  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f: \varphi \mapsto \varphi(a)$ .

Montrer que  $f$  est continue  $\iff |a| \leq 1$ .

**Solution**

- Si  $|a| \leq 1$ , alors  $\forall \varphi \in E, |f(\varphi)| = |\varphi(a)| \leq \sup_{t \in [-1, 1]} |\varphi(t)| = \|\varphi\|_\infty$ .

Donc  $f$  est continue.

- Si  $|a| > 1$ , on pose  $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(t) = t^n$ , on a  $\varphi_n \in E$  et  $\frac{\|f(\varphi_n)\|_\infty}{\|\varphi_n\|_\infty} = \frac{|a|^n}{1} = |a|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  car  $|a| > 1$ .

Donc  $f$  n'est pas continue.

On en déduit alors que  $f$  est continue  $\iff |a| \leq 1$   $\square$

**Théorème 6 (Continuité des applications linéaires en dimension finie).**

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $E$  est de dimension finie, alors  $f$  est continue.

Autrement dit : si  $E$  est de dimension finie,  $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ .

**Exemples**

- ①  $A \mapsto \text{Tr}(A)$  et  $A \mapsto {}^t A$  sont continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- ②  $A = (a_{k,l})_{1 \leq k, l \leq n} \mapsto a_{i,j}$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (il s'agit d'une forme linéaire en dimension finie).
- ③  $A \mapsto (C_1(A), \dots, C_n(A))$  où  $C_1(A), \dots, C_n(A)$  sont les colonnes de  $A$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (il s'agit d'une application linéaire en dimension finie).

### Application 2 (Continuité des applications polynomiales).

Soit  $A$  une algèbre normée et  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  et  $\lambda_\alpha \in \mathbb{K}$

Toute application polynomiale en  $x_1, \dots, x_n : f_n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{\alpha} \lambda_\alpha x_1^{\alpha_1} \times \dots \times x_n^{\alpha_n}$  est continue sur  $A^n$ .

**Preuve :** Pour tout  $i \in [1, n]$ , l'application  $p_i : A^n \rightarrow A$  est continue sur  $A^n$ , car elle est linéaire et

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in A^n, \|p_i(x_1, \dots, x_n)\| = \|x_i\| \leq \max_{0 \leq k \leq n} \|x_k\| = \|(x_1, \dots, x_n)\|$  ( $c = 1$ ), par suite  $f_n = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$  est continue sur  $A^n$ .

Dans la pratique, pour justifier la continuité de  $f_n$  en disant qu'elle est polynomiale en les variables  $x_1, \dots, x_n$   $\square$

### Exemples

① L'application  $(x, y) \mapsto x^2 + 3xy^2 + 2y - 4$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  car elle est polynomiale en  $x, y$ .

② L'application  $(x, y) \mapsto (x^4y + 3xy^2 - 4, xy - 3y)$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  car  $(x, y) \mapsto x^4y + 3xy^2 - 4$  et  $(x, y) \mapsto xy - 3y$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

• L'application  $(x, y) \mapsto \frac{xy - 3y^2}{x^2 + y^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , car c'est une fraction rationnelle en  $x, y$  et son domaine de définition est  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

③ L'application  $(A, B) \mapsto A^2 + AB^2 + 2B - 2I_n$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  car elle est polynomiale en  $A, B$ .

## 6) Applications bilinéaires continues

### Théorème 7 (Continuité des application bilinéaires).

Soit  $f : E \times F \rightarrow G$  une application bilinéaire, alors

$f$  est continue sur  $E \times F \iff \exists c \geq 0, \forall (x, y) \in E \times F, \|f(x, y)\|_G \leq c(\|x\|_E \|y\|_F)$

### Exemples

① L'application  $f : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$  est continue.

② Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel, l'application  $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.

En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,  $\forall x, y \in E, |f(x, y)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  ( $c = 1$ ).

### Théorème 8 (Continuité des application bilinéaires en dimension finie).

Soit  $f : E \times F \rightarrow G$  une application bilinéaire et  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, alors  $f$  est continue.

### Exemples

① L'application  $f : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  est continue.

② L'application  $h : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  est continue.

En effet, l'application  $g : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  est continue sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , car elle est linéaire en dimension finie e

$f : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  est continue sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , car elle est bilinéaire en dimension finie, par suit

$h = f \circ g$  est continue sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ .

③ Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel, l'application  $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.

En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,  $\forall x, y \in E, |f(x, y)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  ( $c = 1$ ).

### Théorème 9 (Continuité des applications multilinéaires).

Soit  $f : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$  une application multilinéaire, alors

①  $f$  est continue sur  $E_1 \times \dots \times E_p \iff \exists c \geq 0, \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \|f(x_1, \dots, x_p)\|_F \leq c\|x_1\|_{E_1} \dots \|x_p\|_{E_p}$

② Si  $E_1, \dots, E_p$  sont de dimension finie, alors  $f$  est continue sur  $E_1 \times \dots \times E_p$ .

## Exemples

Soit  $A$  une algèbre normée et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on munit  $A^n$  de la norme produit.

① L'application  $f_n : A^n \rightarrow A$   
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \times \dots \times x_n$  est continue sur  $A^n$ , car elle est multilinéaire et

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in A^n, \|f_n(x_1, \dots, x_n)\| = \|x_1 \times \dots \times x_n\| \leq \|x_1\| \dots \|x_n\| \quad (c=1).$$

On peut aussi justifier la continuité de  $f_n$ , en disant qu'elle est polynomiale en les variables  $x_1, \dots, x_n$ .

② L'application  $h_n : A \rightarrow A$   
 $x \mapsto x^n$  est continue sur  $A$ .

En effet, l'application  $f_n : A^n \rightarrow A$  est continue sur  $A^n$  et  $g_n : A \rightarrow A^n$ ,  $x \mapsto (x, \dots, x)$ , car elle est linéaire et

$$\forall x \in A, \|g_n(x)\| = \|(x, \dots, x)\| = \max_{1 \leq k \leq n} \|x\| = \|x\| \leq \|x\| \quad (c=1), \text{ par suite } h_n = f_n \circ g_n \text{ est continue sur } A.$$

On peut aussi justifier la continuité de  $h_n$ , en disant qu'elle est polynomiale en la variable  $x$ .

### Application 3 (L'application déterminant est continue).

L'application  $\det : M_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$   
 $A \mapsto \det(A)$  est continue sur  $M_p(\mathbb{K})$

**Preuve 1 :** On sait que  $\forall A \in M_p(\mathbb{K}), \det(A) = \det_B(C_1(A), \dots, C_p(A))$  où  $C_1(A), \dots, C_p(A)$  sont les colonnes de  $A$  et  $B$  est la base canonique de  $M_{p,1}(\mathbb{K})$ .

Soit  $f : M_p(\mathbb{K}) \rightarrow M_{p,1}(\mathbb{K})^p$   
 $A \mapsto (C_1(A), \dots, C_p(A))$  est continue sur  $M_p(\mathbb{K})$ , car elle est linéaire en dimension finie et

$g : M_{p,1}(\mathbb{K})^p \rightarrow \mathbb{K}$   
 $(X_1, \dots, X_p) \mapsto \det_B(X_1, \dots, X_p)$  est continue sur  $M_{p,1}(\mathbb{K})^p$ , car elle est  $p$ -linéaire en dimension finie,

par suite  $A \mapsto \det(A) = g \circ f(A)$  est continue sur  $M_p(\mathbb{K})$ .

Dans la pratique, pour justifier la continuité de  $A \mapsto \det(A)$  en disant qu'elle est linéaire en les colonnes de  $A$  ☒

**Preuve 2 :** Pour tout  $i, j \in [1, p]$ , l'application  $p_{i,j} : M_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$   
 $A = (a_{k,l})_{1 \leq k, l \leq p} \mapsto a_{i,j}$  est continue sur  $M_p(\mathbb{K})$ , car elle est linéaire

en dimension finie, par suite  $A \mapsto \det(A) = \sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^p p_{i, \sigma(i)}(A)$  est continue sur  $M_p(\mathbb{K})$ .

Dans la pratique, pour justifier la continuité de  $A \mapsto \det(A)$  en disant qu'elle est polynomiale en les coefficients de  $A$  ☒

**Exercice 19 (Continuité de  $A \mapsto A^{-1}$ )**  
Montrer que l'application  $GL_p(\mathbb{K}) \rightarrow M_p(\mathbb{K})$   
 $A \mapsto A^{-1}$  est continue.

### Solution

On sait que  $\forall A \in GL_p(\mathbb{K}), A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t \text{com}(A)$ .

Comme  $g : A \mapsto \text{com}(A)$  est continue sur  $GL_p(\mathbb{K})$ , car elle est polynomiale en les coefficients de  $A$  et  $f : B \mapsto {}^t B$  est continue sur  $M_p(\mathbb{K})$ , car elle est linéaire en dimension finie, par suite  $h : A \mapsto g \circ f(A) = {}^t \text{com}(A)$  est continue sur  $GL_p(\mathbb{K})$ .

Puisque  $A \mapsto \det(A)$  est continue et ne s'annule pas sur  $GL_p(\mathbb{K})$ , car elle est linéaire en les colonnes de  $A$ , alors  $A \mapsto A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot h(A)$  est continue sur  $GL_p(\mathbb{K})$  ☒

## 7) Continuités et topologie

### Proposition 48 (Prolongement par densité).

Soit  $D$  une partie de  $E$  et  $f, g : E \rightarrow F$

Si  $\begin{cases} f \text{ et } g \text{ sont continues sur } E \\ \forall x \in D, f(x) = g(x) \\ D \text{ est dense dans } E \end{cases}$ , alors  $\forall x \in E, f(x) = g(x)$ .

### Application 4.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$   
Alors  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x$  avec  $\alpha = f(1)$ .

**Proposition 49 (Continuité globale).**

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $f : A \rightarrow F$ , alors sont équivalentes

- ①  $f$  est continue sur  $A$ .
- ② L'image réciproque de tout ouvert de  $F$  est un ouvert relative de  $A$ .
- ③ L'image réciproque de tout fermé de  $F$  est un fermé relative de  $A$ .

**Remarque 28 (Méthode pour montrer une partie est ouverte ou fermée).**

Soit  $A$  une partie de  $E$ , pour démontrer que  $A$  est un ouvert (resp. fermé) de  $E$ , on cherche une application  $f : E \rightarrow F$  continue sur  $E$  et  $B$  un ouvert (resp. fermé) de  $F$  telle que  $A = f^{-1}(B)$ .

**Exemples**

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \sin(x) < x^2 - y\}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .  
En effet, soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} (x, y) \in A &\iff \sin(x) < x^2 - y \\ &\iff \underbrace{x^2 - y - \sin(x)}_{f(x, y)} > 0 \\ &\iff f(x, y) \in ]0, +\infty[ \\ &\iff (x, y) \in f^{-1}(]0, +\infty[) \end{aligned}$$

On en déduit que  $A = f^{-1}(]0, +\infty[)$ .

Comme  $(x, y) \mapsto x$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ , car elle est polynomiale et  $t \mapsto \sin(t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , alors par composée,  $(x, y) \mapsto \sin(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ , puisque  $(x, y) \mapsto x^2 - y$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  car elle est polynomiale, alors  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

Comme  $]0, +\infty[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ , alors  $A = f^{-1}(]0, +\infty[)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y \leq 5x\}$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ .  
En effet, soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} (x, y) \in B &\iff x^2 - y \leq 5x \\ &\iff \underbrace{x^2 - y - 5x}_{g(x, y)} \leq 0 \\ &\iff g(x, y) \in ]-\infty, 0] \\ &\iff (x, y) \in g^{-1}(]-\infty, 0]) \end{aligned}$$

On en déduit que  $B = g^{-1}(]-\infty, 0])$ .

Comme  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  car elle est polynomiale, et  $]-\infty, 0]$  est un fermé de  $\mathbb{R}$ , alors  $B = g^{-1}(]-\infty, 0])$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ .

**Application 5.**

- ① Le groupe des matrices inversibles  $GL_p(\mathbb{K})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ .
- ② Le groupe orthogonal  $\mathcal{O}_p(\mathbb{R})$  est un fermé de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

**Preuve :**

- ① Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , alors  $A \in GL_p(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0 \iff \underbrace{\det(A)}_{=f(A)} \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \iff A \in f^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$

On en déduit que  $GL_p(\mathbb{K}) = f^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$

Comme  $f : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  est continue sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , car  $A \mapsto \det(A)$  est linéaire en les colonnes de  $A$  et  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$  est un ouvert de  $\mathbb{K}$ , ( car  $\{0\}$  est un fermé de  $\mathbb{K}$ , puisque toute partie finie est fermée), alors  $GL_p(\mathbb{K}) = f^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ .

- ② Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , alors  $A \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R}) \iff {}^tAA = I_p \iff \underbrace{{}^tAA}_{=f(A)} \in \{I_p\} \iff A \in f^{-1}(\{I_p\})$

On en déduit que  $\mathcal{O}_p(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_p\})$

On a vu que l'application  $f : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  définie par  $f(A) = {}^tAA$  est continue sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  et  $\{I_p\}$  est un fermé (il s'agit d'une partie finie), alors  $\mathcal{O}_p(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_p\})$  est un fermé de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  ☐

**V) Compacité**

On considère  $(E, || ||)$  et  $(F, || ||)$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

## 1) Définition et propriétés

### Définition 35 (Partie compacte).

Une partie  $A$  de  $E$  est dite compacte si de toute suite d'éléments de  $A$ , on peut extraire une sous suite convergente dans  $A$ .  
Autrement dit : toute suite d'éléments de  $A$ , admet ou moins une valeur d'adhérence dans  $A$ .

**Exemple** Tout segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  est un compact de  $\mathbb{R}$   $\square$

### Solution

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $[a, b]$ , alors  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, puisque  $\mathbb{R}$  est de dimension finie, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une valeur d'adhérence  $\ell \in \mathbb{R}$ , comme  $[a, b]$  est un fermé de  $\mathbb{R}$ , alors  $\ell \in [a, b]$   $\square$

### Remarque 29.

Si  $N_1$  et  $N_2$  deux normes équivalentes sur  $E$ , alors

$$A \text{ est un compact pour } N_1 \iff A \text{ est un compact pour } N_2$$

En particulier, en dimension finie la compacité ne dépend pas de la norme choisie.

### Proposition 50.

Soit  $A$  une partie de  $E$ , alors

$$A \text{ est un compact de } E \implies A \text{ est un fermé et borné de } E$$

**Exemple**  $[0, +\infty[$  n'est pas un compact de  $\mathbb{R}$ , car n'est pas bornée.  $\square$

### Théorème 10 (Caractérisation d'un compact en dimension finie).

On suppose que  $E$  est de dimension finie. Une partie  $A$  de  $E$  est compacte si, et seulement si  $A$  est fermée et bornée.

**Exemple** En dimension finie, les boules fermées, les sphères et les parties finies sont des parties compactes  $\square$

### Remarque 30.

En dimension infinie, une partie fermée bornée n'est pas nécessairement compacte comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple** Dans  $E = \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{C})$  muni de la norme  $\| \cdot \|_\infty$ , la sphère unité  $S(0, 1)$  n'est pas compacte  $\square$

### Solution

On considère  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite d'éléments de  $E$  définie par  $\forall t \in [0, \pi], f_n(t) = e^{int}$ .

• Pour tout  $t \in [0, \pi], |f_n(t)| = |e^{int}| = 1$ , alors  $\|f_n\|_\infty = 1$ , donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $S(0, 1)$ .

• Pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$  tel que  $n \neq m$  et  $t \in [0, \pi]$

$$f_n(t) - f_m(t) = e^{int} - e^{imt} = e^{i\frac{n+m}{2}t} \left( e^{i\frac{n-m}{2}t} - e^{-i\frac{n-m}{2}t} \right) = e^{i\frac{n+m}{2}t} \times 2i \sin\left(\frac{n-m}{2}t\right)$$

$$\text{Donc } \|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{t \in [0, \pi]} |f_n(t) - f_m(t)| = \sup_{t \in [0, \pi]} \left| e^{i\frac{n+m}{2}t} \times 2i \sin\left(\frac{n-m}{2}t\right) \right| = \sup_{t \in [0, \pi]} 2 \left| \sin\left(\frac{n-m}{2}t\right) \right| = 2$$

(atteint en  $\frac{\pi}{n-m} \in [0, \pi]$ ).

• Supposons que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une valeur d'adhérence  $f \in S(0, 1)$ , alors il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f$ .

D'après le point précédent,  $\forall n \in \mathbb{N}, (*) \|f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n+1)}\|_\infty = 2$ , car  $\varphi(n+1) \neq \varphi(n)$ .

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans  $(*)$ , on en déduit que  $0 = \|f - f\|_\infty = 2$  ce qui est impossible  $\square$

### Application 6.

Le groupe orthogonal  $\mathcal{O}_p(\mathbb{R})$  est un compact de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

### Preuve :

Comme  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , il suffit de montrer que  $\mathcal{O}_p(\mathbb{R})$  est un fermé borné.

- Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , alors  $A \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R}) \iff {}^tAA = I_p \iff \underbrace{{}^tAA}_{=f(A)} \in \{I_p\} \iff A \in f^{-1}(\{I_p\})$

On en déduit que  $\mathcal{O}_p(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_p\})$

On a vu que l'application  $f : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  définie par  $f(A) = {}^tAA$  est continue sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et  $\{I_p\}$  est un fermé (il s'agit d'une partie finie), alors  $\mathcal{O}_p(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_p\})$  est un fermé de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

- $\forall A \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R}), \|A\|_2 = \sqrt{\text{Tr}({}^tAA)} = \sqrt{p} \leq \sqrt{p}$  constante, ne dépend pas de la matrice  $A$ , donc  $\mathcal{O}_p(\mathbb{R})$  est borné  $\square$

### Proposition 51 (Partie compacte d'un compact).

Soit  $K$  une partie compacte de  $E$  et  $A \subset K$ , alors

$$A \text{ est un compact de } E \iff A \text{ est un fermé de } E$$

**Exemple**  $[0, 1] \cup [2, 3]$  est un compact de  $\mathbb{R}$ , car  $\underbrace{[0, 1]}_{\text{fermé}} \cup \underbrace{[2, 3]}_{\text{compact}} \subset \underbrace{[0, 3]}_{\text{compact}} \quad \square$

### Proposition 52 (Produit de deux compacts).

Soit  $A$  un compact de  $E$  et  $B$  un compact de  $F$ , alors  $A \times B$  est un compact de  $E \times F$ .

**Exemple**  $[0, 1] \times [2, 3]$  et  $[0, 1]^2$  sont des compacts de  $\mathbb{R}^2$   $\square$

### Corollaire 4 (Produit fini de compacts).

Soit  $E_1, \dots, E_p$  des  $K$ -espaces vectoriels normés.

Si  $\forall i \in [1, p]$ ,  $A_i$  est un compact de  $E_i$ , alors  $\prod_{1 \leq i \leq p} A_i$  est un compact de  $\prod_{1 \leq i \leq p} E_i$ .

**Exemple**  $[0, 1]^p$  est un compact de  $\mathbb{R}^p$   $\square$

### Proposition 53 (Convergence d'une suite d'éléments d'un compact).

Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.

### Corollaire 5 (Convergence d'une suite bornée en dimension finie).

Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si, et seulement si, elle possède une unique valeur d'adhérence.

## 2) Compacité et continuité

### Proposition 54 (Image directe d'un compact par application continue).

Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$  une application continue et  $A$  compact de  $E$ , alors  $f(A)$  est un compact de  $F$ .

**Exemple**  $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$  est un compact de  $\mathbb{C}$   $\square$

### Remarque 31.

L'image réciproque d'un compact par une application continue n'est pas nécessairement un compact, comme le montre l'exemple suivant :

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application nulle,  $\{0\}$  est un compact de  $\mathbb{R}$  et  $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$  n'est pas un compact de  $\mathbb{R}$ , car n'est pas bornée.

### Théorème 11 (Théorème des bornes atteintes).

Soit  $f : A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue et  $A$  compact de  $E$ , alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes :  $\exists \alpha, \beta \in A$  tel que  $\inf_{x \in A} f(x) = \min_{x \in A} f(x) = f(\alpha)$  et  $\sup_{x \in A} f(x) = \max_{x \in A} f(x) = f(\beta)$ .

**Application 7.**

Si  $A$  est une partie compacte de  $E$  et  $x \in E$ , alors  $\exists a_0 \in A$  tel que  $d(x, A) = \|x - a_0\|$ .

**Preuve :** On a  $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\| = \inf_{a \in A} f(a)$  avec  $\forall a \in A, f(a) = \|x - a\|$ .

Comme l'application  $f$  est continue sur  $A$  (par composée de deux applications continues  $y \mapsto \|y\|$  et  $a \mapsto x - a$ ) et  $A$  est compact, alors elle est bornée sur  $A$  et atteint ses bornes, ainsi  $\exists a_0 \in A$  tel que  $d(x, A) = \inf_{a \in A} f(a) = f(a_0) = \|x - a_0\|$   $\square$

**Corollaire 6.**

Soit  $g : A \subset E \rightarrow F$  une application continue et  $A$  compact de  $E$ , alors  $g$  est bornée et atteint ses bornes :  $\exists \alpha, \beta \in A$  tel que  $\inf_{x \in A} \|g(x)\| = \min_{x \in A} \|g(x)\| = \|g(\alpha)\|$  et  $\sup_{x \in A} \|g(x)\| = \max_{x \in A} \|g(x)\| = \|g(\beta)\|$ .

**Théorème 12 (Théorème de Heine).**

Toute application continue sur une partie compacte est uniformément continue.

**VI) Connexité par arcs**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $K$ -espace vectoriel normé.

**1) Définition et exemples****Définition 36 (Arc ou chemin continu et partie connexe par arcs).**

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $a, b \in A$ ,

- On appelle arc (ou chemin continu) joignant  $a$  et  $b$  dans  $A$  toute application  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  continue à valeurs dans  $A$  telle que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma(1) = b$ .
- On dit que  $A$  est connexe par arcs si  $\forall a, b \in A, \exists \gamma \in \mathcal{C}([0, 1], A), \gamma(0) = a$  et  $\gamma(1) = b$ .

**Exemple** Toute partie convexe est connexe par arcs.  $\square$

**Remarque 32.**

Une partie connexe par arcs n'est pas nécessairement convexe comme le montre l'exemple suivant :  
Les sphères sont des parties connexes par arcs mais ne sont pas convexes.

**Définition 37 (Partie étoilée).**

Une partie  $A$  de  $E$  est étoilée s'il existe  $a \in A$  tel que  $\forall b \in A, [a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b, \lambda \in [0, 1]\} \subset A$ .

**Application 8.**

L'ensemble des matrices nilpotentes est connexe par arcs.

**Preuve :** Il s'agit d'une partie étoilée par rapport à la matrice nulle  $\square$

**Remarque 33.**

Une partie étoilée n'est pas nécessairement convexe comme le montre l'ensemble des matrices nilpotentes.

- L'ensemble des matrices nilpotentes est étoilé par rapport à la matrice nulle.
- $E_{1,p}, E_{p,1}$  sont des matrices nilpotentes et  $(1 - \frac{1}{2})E_{1,p} + \frac{1}{2}E_{p,1} = \frac{1}{2}(E_{1,p} + E_{p,1})$  n'est pas nilpotente, puisque  $\forall n \in \mathbb{N}, (\frac{1}{2}(E_{1,p} + E_{p,1}))^{2n} = \frac{1}{2^{2n}}(E_{1,1} + E_{p,p}) \neq 0$ , donc l'ensemble des matrices nilpotentes n'est pas convexe.

**Théorème 13 (Connexes par arcs de  $\mathbb{R}$ ).**

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ , alors

$$A \text{ est un connexe par arcs} \iff A \text{ est un convexe} \iff A \text{ est un intervalle}$$

**Proposition 55.**

Soit  $A$  une partie de  $E$ , on définit la relation binaire  $\sim$  sur  $A$  par

$$a \sim b \iff \exists \gamma \in \mathcal{C}([0, 1], A), \gamma(0) = a \text{ et } \gamma(1) = b$$

$\sim$  est une relation d'équivalence sur  $A$ .

On note  $\mathcal{C}(a)$  la classe d'équivalence de  $a \in A$ , appelée la composante connexe par arcs de  $a$  dans  $A$ .

**Remarque 34.**

- $\forall a \in A, \mathcal{C}(a)$  est un connexe par arcs.
- $\forall a, b \in A, \mathcal{C}(a) = \mathcal{C}(b)$  ou  $\mathcal{C}(a) \cap \mathcal{C}(b) = \emptyset$ .
- L'ensemble des classes d'équivalences forment une partition de  $A$ .
- Si  $A$  est connexe par arcs, alors  $\forall a \in A, \mathcal{C}(a) = A$ .

**2) Connexité par arcs et continuité****Proposition 56 (Image directe d'une partie connexe par arcs).**

Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$  continue et  $A$  est connexe par arcs de  $E$ , alors  $f(A)$  est une partie connexe par arcs de  $F$ .

**Application 9.**

Le groupe des matrices inversibles  $GL_p(\mathbb{R})$  n'est pas connexe par arcs de  $M_p(\mathbb{R})$ .

**Preuve :** par absurde, supposons que  $GL_p(\mathbb{R})$  est connexe par arcs de  $M_p(\mathbb{R})$

Comme  $\det : M_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, car il est polynomiale en les coefficients de  $A$ , alors  $\det(GL_p(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$  n'est pas un intervalle de  $\mathbb{R}$  ☒

**Théorème 14 (des valeurs intermédiaires).**

Soit  $f : A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $A$  est connexe par arcs de  $E$  et  $(a, b) \in A^2$ , alors  $f(A)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .  
En particulier, pour tout  $d$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe  $c \in A$  tel que  $d = f(c)$

**Exercice 20**

On se propose de montrer que toute application  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue et injective est strictement monotone. ( $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ).

① Montrer que  $A = \{(x, y) \in I^2, x < y\}$  est une partie de  $\mathbb{R}^2$  connexe par arcs.

② Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue et injective.

On considère l'application  $F : \begin{cases} A \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x) - f(y) \end{cases}$

(a) Justifier que  $F$  est continue sur  $A$  et  $0 \notin F(A)$ .

(b) Conclure.

**Solution**

① Il suffit de montrer que  $A$  est un convexe.

② (a) comme  $(x, y) \mapsto x$  et  $(x, y) \mapsto y$  sont continues sur  $A$  à valeurs dans  $I$  (il s'agit des application polynomiales en  $x, y$ ), comme  $f$  est continue sur  $I$ , alors par composée  $(x, y) \mapsto f(x)$  et  $(x, y) \mapsto f(y)$  sont continues sur  $A$ ,

ainsi  $F : (x, y) \mapsto f(x) - f(y)$  est continue sur  $A$ .

•  $\forall (x, y) \in A$ , on a  $x < y$ , donc  $x \neq y$ , comme  $f$  est injective, alors  $f(x) \neq f(y)$ , d'où  $F(x, y) \neq 0$ , ainsi  $0 \notin F(A)$ .

(b) Comme  $F$  est continue sur  $A$  qui est connexe par arcs, alors  $F(A)$  est un connexe par arcs de  $\mathbb{R}$ .

Donc  $F(A)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , comme  $0 \notin F(A)$ , alors  $F(A) \subset ]-\infty, 0[$  ou  $F(A) \subset ]0, +\infty[$ .

Si  $F(A) \subset ]-\infty, 0[$ , alors  $f$  est strictement décroissant sur  $I$

Si  $F(A) \subset ]0, +\infty[$ , alors  $f$  est strictement croissant sur  $I$

On conclut alors que  $f$  est strictement monotone, ainsi toute application continue et injective sur  $I$  est strictement monotone ☒

# Série dans un e.v.n de dimension finie

**Définition 1.6.6** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments dans  $E$ . On appelle série de terme général  $u_n$  et on note  $\sum_{n \geq 0} u_n$ , cest la donnée du couple  $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$  avec  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k \forall n \in \mathbb{N}$ .

$S_n$  est appelé la  $n^{\text{ème}}$  somme partielle.

## Exemples

Soit  $A \in M_r(\mathbb{R})$ , les séries  $\sum_{n \geq 0} A^n$  et  $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$  sont des séries matricielles.

**Définition 1.6.7** • On dit que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est convergente si la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des sommes partielles est convergente. Dans ce cas la limite de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est appelée somme de la série et sera notée  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$$

• Si la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge, on définit le reste d'ordre  $n$  par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

**Proposition 1.6.5** Si une série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est convergente, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**Proposition 1.6.6** La série  $\sum_{n \geq 0} u_{n+1} - u_n$  converge si et seulement si la suite  $(u_n)$  converge.

**Définition 1.6.8** Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série à termes dans  $E$ .

On dit que le série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est absolument convergente si le série  $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|$  converge.

**Proposition 1.6.7** Si la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est absolument convergente, alors elle converge et dans ce cas on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$

## Exemples

Dans  $(M_n(\mathbb{R}))$ , on considère une norme qui vérifie  $\forall A, B \in (M_n(\mathbb{R})) \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$  converge. On pose  $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \exp$

Si  $D$  est diagonale,  $e^D$

Si  $A$  est diagonalisable,  $e^A$