

Espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre E désigne un K -espace vectoriel avec $IK = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Norme

- On dit qu'une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une **norme** si elle vérifie les assertions suivantes :
 - $N(x) = 0 \iff x = 0_E$
 - $\forall \lambda \in K \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
 - $\forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (Inégalité triangulaire)
- $N(x)$ sera noté aussi $\|x\|$.
- Le couple (E, N) est appelé espace vectoriel normé et noté (e.v.n).

Remarques

$$\forall x, y \in E, |N(x) - N(y)| \leq N(x \pm y)$$

Norme associée à un produit scalaire

Soit E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Un **produit scalaire** sur $\mathbb{R}$ est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les assertions suivantes :

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une application bilinéaire par rapport à la 1ère variable
- $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ symétrique
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini positif
 - $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$ (positive)
 - si $\langle x, x \rangle = 0$, alors $x = 0$ (définitif)

On dira alors que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est **espace préhilbertien réel**.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, alors $\forall x, y \in E$ on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

Théorème

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, alors E est un e.v.n muni d'une norme associée au produit scalaire défini par :

$$N : E \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

A retenir et savoir faire

Normes sur IK^n

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Normes sur $C([a, b], \mathbb{R})$

$$\forall f \in C([a, b], \mathbb{R}).$$

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ appelée norme de convergence uniforme.

$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$ appelée norme de convergence en moyenne.

$\|f\|_2 = \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ appelée norme de convergence en moyenne quadratique.

Proposition

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

On pose $E = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } f^2 \text{ est intégrable sur } I\}$. Alors

- i) Si f et g sont deux éléments de E , alors la fonction fg est intégrable sur I .
- ii) E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.



iii) L'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \mapsto \int_I f(t)g(t) dt$$

est un produit scalaire sur E .

iv) L'application $N_2 : f \mapsto \left(\int_I (f(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur E .

Distance

Soit (E, N) un e.v.n. On appelle **distance associée** à N l'application

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = N(x - y)$$

- i) $\forall x, y \in E \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- ii) $\forall \lambda \in IK \text{ et } \forall x, y \in E, \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$
- iii) $\forall x, y, z \in E \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Distance d'un point à une partie

Soient (E, N) un e.v.n., d la distance associée, A une partie non vide de E et $x \in E$.

On appelle distance de x à A et l'on note $d(x, A)$ le nombre réel défini par :

$$d(x, A) = \inf\{N(x - a) = d(x, a), a \in A\}.$$

Partie bornée

Soient (E, N) un e.v.n. et A une partie non vide de E .

On dit que A est bornée s'il existe $r > 0$ tel que $d(x, y) \leq r, \forall (x, y)^2 \in A$

$$\iff \exists M > 0 \text{ tel que } N(x) \leq M, \forall x \in A.$$

Boules

Soient (E, N) un e.v.n., $a \in E$ et r un réel strictement positif. On définit les parties suivantes :

$B(a, r) = \{x \in E; d(x, a) = N(x - a) < r\}$ boule ouverte de centre a et de rayon r .

$B_f(a, r) = \{x \in E; d(x, a) = N(x - a) \leq r\}$ boule fermée de centre a et de rayon r .

$S(a, r) = \{x \in E; d(x, a) = N(x - a) = r\}$ sphère de centre a et de rayon r .

Partie convexe

Soit A une partie non vide de (E, N) .

On dit que A est une partie convexe de E , si pour tout $(x, y) \in A^2$ le segment $[x, y] \subset A$ avec $[x, y] = \{\alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha \in [0, 1]\}$

Exemple 0.0.1.

$\forall a \in E$ et $\forall r > 0$, la boule ouverte $B(a, r)$ et la boule fermée $B_f(a, r)$ sont des convexes de E .

Produit d'espaces vectoriels normés

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i, N_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de K -espaces vectoriels normés. On considère $E = \prod_{i=1}^n E_i$ l'espace vectoriel produit. Alors

E est un e.v.n muni de l'une des trois normes suivantes :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} N_k(x_k)$$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n N_k(x_k), \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n (N_k(x_k))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Equivalence des normes

Soient (E, N) un e.v.n. N et N' deux normes sur E .

On dit que N est équivalente à N' et on note $N \sim N'$ s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x), \quad \forall x \in E.$$

Théorème

La relation " $\sim$ " est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E .

$$N \sim N$$

$$\text{Si } N \sim N', \text{ alors } N' \sim N.$$

$$N \sim N' \text{ et } N' \sim N'', \text{ alors } N \sim N''$$

Proposition

Soit (E, N) un e.v.n. tel que $E \neq \{0\}$.

Deux normes N et N' sur E sont équivalentes si les applications

$$\frac{N}{N'} \text{ et } \frac{N'}{N} \text{ sont bornées sur } E \setminus \{0\}.$$

Remarque

S'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $E \setminus \{0\}$ telle que $\frac{N(x_n)}{N'(x_n)} \rightarrow$

0 ou bien $+\infty$, alors $\frac{N}{N'}$ ou $\frac{N'}{N}$ n'est pas bornée. Ce qui montre que N et N' ne sont pas équivalentes.

Suites dans un e.v.n

Soit $(U_n)_n$ une suite d'éléments de E .

On dit que $(u_n)_n$ est **bornée** s'il existe un réel $M \geq$ tel que $\|(u_n)_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

On dit que (U_n) **converge** dans E s'il existe $l \in E$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_0, \|U_n - l\| < \varepsilon$.

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \|U_n - l\| = 0$.

Proposition

Soit (U_n) une suite d'éléments de E .

1) i) Si (U_n) converge vers une limite $l \in E$, alors cette limite est unique.

ii) Toute suite convergente dans E est bornée.

2) i) Une suite (U_n) est bornée dans (E, N) si et seulement si elle est bornée dans (E, N') .

ii) Une suite (U_n) converge vers l dans (E, N) si et seulement si elle converge vers l dans (E, N') .

Opération sur les limites

Soient $(U_n), (V_n)$ deux suites de E , (λ_n) une suite d'éléments de K , $l, l' \in E$ et $\lambda \in K$.

a) i) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l'$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda U_n + V_n = \lambda l + l'$.

ii) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \lambda$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n U_n = \lambda l$.

Opération sur les limites

- iii) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$ et la suite (U_n) est bornée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n U_n = 0$.
- b) i) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|U_n\| = \|l\|$
 ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0_E \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \|U_n\| = 0$

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i, N_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de IK -espace vectoriels normés.

Soit $E = \prod_{i=1}^n E_i$ muni de la norme $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} N_k(x_k) \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E$.

Soit (U_n) une suite d'éléments de E de terme général $U_n = (U_{n,1}, \dots, U_{n,k})$ et $l = (l_1, \dots, l_k) \in E$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n,k} = l_k, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

Valeur d'adhérence d'une suite

Soit (U_n) une suite d'éléments de E .

- On appelle **sous-suite** ou bien suite extraite toute suite de la forme $(U_{\varphi(n)})$ où φ est une extracrice (i.e., une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$).
- $l \in E$ est une **valeur d'adhérence** de la suite (U_n) , si elle est la limite d'une sous-suite.

Proposition

- Si une suite (U_n) converge vers une limite l , alors toute sous-suite converge vers la même limite l .
- Une suite (U_n) converge vers une limite l si et seulement si les sous-suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) convergent vers la même limite l .

Remarque

S'il existe deux sous-suites $(U_{\varphi(n)})$ et $(U_{\psi(n)})$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{\varphi(n)} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{\psi(n)}$$

alors la suite (U_n) diverge.

Topologie d'un e.v.n.

Dans toute cette partie on considère $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n.

voisinage

Soit $a \in E$ et V une partie non vide de E .

On dit que V est un **voisinage** de a , s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$
 On note V_a l'ensemble des voisinages de a .

Propriétés

- Soient V un voisinage de a et W une partie de E tels que $V \subset W$, alors W est un voisinage de a .
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de voisinages de a , alors $\bigcap_{1 \leq i \leq n} V_i$ est un voisinage de a .
- Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de voisinages de a , alors $\bigcup_{i \in I} V_i$ est un voisinage de a .

Ouvert

Soit $O \subset E$.

On dit que O est **ouvert**, s'il est voisinage de chacun de ses points $\iff \forall x \in O \exists r > 0$, tel que $B(x, r) \subset O$.

Propriétés

- Par convention l'ensemble $\emptyset$ est un ouvert de E .
- E est ouvert de E .
- Soit $(O_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie d'ouverts, alors $\bigcap_{i=1}^n O_i$ est un d'ouvert.
- Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ouverts, alors $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un d'ouverts.

Fermé

Soit F une partie de E .
On dit que F est **un fermé** si ${}^c F$ (le complémentaire de F dans E) est un ouvert.

Propriétés

- E et $\emptyset$ sont des fermés de E .
- Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de fermés de E , alors $\bigcup_{i=1}^n F_i$ est un fermé.
- Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de fermés de E , alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé.

Exemples.

1) Soient $r > 0$ et $a \in E$, alors la sphère, $S(a, r)$, de centre a et de rayon $r > 0$ est un fermé.

2) Pour tout $a \in E$, $\{a\}$ est un fermé.

Théorème

Soient N_1 et N_2 deux normes équivalents sur E avec $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$. Alors

- $\forall a \in E$ et $r > 0$, on a : $B_{N_2}(a, r) \subset B_{N_1}(a, r) \subset B_{N_2}(a, \beta r)$.
- V est un voisinage de $a \in E$ dans (E, N_1) si et seulement si V est un voisinage de a dans (E, N_2) .
- O est un ouvert dans (E, N_1) si et seulement si O est un ouvert dans (E, N_2) .
- F est un Fermé dans (E, N_1) si et seulement si F est un Fermé dans (E, N_2) .

Intérieur

* Soit $a \in E$. On dit que a est un point intérieur à A si

$$\exists r > 0 \text{ tel que } B(a, r) \subset A.$$

* On appelle **intérieur** de A et on note A° c'est l'ensemble de tous les points intérieurs à A .

Théorème

Soit A est une partie de E .

- $A^\circ = \bigcup_{O \text{ ouvert } C \subset A} O$ (A° est le plus grand (au sens de l'inclusion) ouvert inclu dans A).
- $A^\circ \subset A$
- A° est un ouvert.
- A est un ouvert si et seulement si $A = A^\circ$.

Adhérence

* Soit $a \in E$, On dit que a est un point adhérent à A si

$$\forall r > 0 \ B(a, r) \cap A \neq \emptyset.$$

* On appelle **adhérence** de A et on note $\bar{A}$ c'est l'ensemble de tous les points adhérents à A .

✿ Proposition

Soit $A \subset E$.

- i) ${}^c({}^c A) = A$.
- ii) $({}^c A)^{\circ} = {}^c({}^c A)$.

✿ Théorème

Soit A est une partie de E .

- i) $\bar{A} = \bigcap_{A \subset F} F$ ($\bar{A}$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé contenant A).
- ii) $A \subset \bar{A}$.
- iii) $\bar{A}$ est un fermé.
- iv) A est un fermé si et seulement si $\bar{A} = A$.

✿ Frontière

* On appelle **frontière** de A et on note $Fr(A)$ la partie de E définie par

$$Fr(A) = \bar{A} \setminus A^{\circ} = \bar{A} \cap {}^c(A^{\circ})$$

$Fr(A)$ est un fermé de E .

✿ Caractérisation séquentielle

Soient $A \subset E$ et $x \in E$.

- $x \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite (x_n) d'éléments de A telle que (x_n) converge vers x .
- A est un fermé si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de A qui converge, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \in A$.

✿ Partie dense

Soit $A \subset E$.

On dit que A est dense dans E si $\bar{A} = E$.

Exemple.

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont des parties denses dans $\mathbb{R}$.

Remarque.

Si B est une partie de E contenant une partie dense dans E , alors B est dense dans E .

✿ Théorème

Soit $A \subset E$. On a l'équivalence entre les assertions suivantes

- i) A est dense dans E
- ii) $\forall x \in E, \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.
- iii) $\forall x \in E$, il existe (x_n) d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

✿ Topologie relative

Soit A une partie de $E, x \in E$.

- 1) • On appelle voisinage de x relatif à A tout ensemble de la forme $V \cap A$ où V est un voisinage de x dans E .
- Une partie B est un voisinage de a relatif à A si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap A \subset B$.

2) On appelle ouvert relatif à A tout ensemble de la forme $O \cap A$ avec O ouvert de E .

3) On appelle fermé relatif à A tout ensemble de la forme $F \cap A$ avec F fermé de E .

4) $\emptyset$ et A sont des ouverts et des fermés relatifs à A .

Exemples

- 1) $[0, 1]$ est un voisinage de 0 relatif à $\mathbb{R}^+$, puisque $[0, 1] = [-1, 1] \cap \mathbb{R}^+$.
- 2) $[0, 1[$ est un ouvert relatif à $\mathbb{R}^+$, puisque $[0, 1[=]-1, 1[\cap \mathbb{R}^+$.

✿ Théorème

Soit A une partie de E et X une partie de E tel que $X \subset A$. On a équivalence entre les assertions suivantes :

- (i) X est un fermé relatif à A
- (ii) Si (x_n) une suite d'éléments de X convergente dans A , alors $x \in X$.
- (iii) Le complémentaire de X dans A, C_A^X est un ouvert relatif à A .

Limite et Continuité dans un e.v.n.

Dans toute cette partie $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ représentent deux e.v.n. et A une partie non vide de E .

Limite

Soient $f : A \rightarrow F$, $a \in \bar{A}$ et $l \in F$.

On dit que f tend vers l quand x tend vers a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A$ avec $\|x - a\|_E < \alpha$ alors $\|f(x) - l\|_F < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A \cap B(a, \alpha)$ alors $f(x) \in B(l, \varepsilon)$

Proposition

Soient $f : A \rightarrow F$ et $a \in \bar{A}$

Si f admet une limite l en a , alors cette limite est unique.

Opérations sur les limites

Soient $f, g : A \rightarrow F$, $a \in \bar{A}$, $l, l' \in F$ et $\lambda \in K$.

a) i) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda l$ et $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = l + l'$.

iii) On suppose ici que la fonction f est à valeurs dans IK

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ et la fonction g est bornée alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

b) i) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|l\|$

ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = 0$

Composition des limites

Soient E, F et G trois e.v.n., A une partie de E et B une partie de F , $a \in \bar{A}$

On considère $f : A \rightarrow F$ et $g : B \rightarrow G$ tels que $f(A) \subset B$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l$

Proposition

Soient E un e.v.n. et $F = \prod_{k=1}^p E_k$, $p \in \mathbb{N}$ et $l = (l_1, \dots, l_p) \in F$, $a \in \bar{A}$.

On considère

$f : E \rightarrow F$
 $x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ si et seulement si $\forall 0 \leq k \leq p, \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = l_k$

Caractérisation séquentielle de la limite

Soient $f : A \rightarrow F$, $a \in \bar{A}$ et $l \in F$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de A telle que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$.

Remarques.

i) S'ils existent deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de A telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$, alors f n'admet pas de limite en a .

ii) S'il existe une suite (x_n) d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, mais la suite $(f(x_n))$ n'admet de limite, alors f n'admet pas de limite en a .

* Continuité

* Soient $f : A \rightarrow F$ et $a \in A$.

On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_F < \alpha, \text{ alors } \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon.$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A \cap B(a, \alpha) \text{ alors } f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$

* On dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point de A .

* Opérations sur la continuité

Soient $f, g : A \rightarrow F, a \in A$,

a) i) Si f et g sont continues en a , alors la fonction $\lambda f + g$ est continue en a .

b) Soient E, F et G trois e.v.n., A une partie de E et B une partie de $F, a \in A$

On considère $f : A \rightarrow F, g : B \rightarrow G$ tels que $f(A) \subset B$.

Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en a .

* Proposition

Soient E un e.v.n. et $F = \prod_{k=1}^p E_k$ p evn et $l = (l_1, \dots, l_p) \in F, a \in A$.

On considère

$$f : E \rightarrow F$$

$$x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)).$$

Alors

f est continue en a si et seulement si $\forall 0 \leq k \leq p, f_k$ est continue en a .

* Caractérisation séquentielle de la continuité

Soient $f : A \rightarrow F, a \in A$.

f est continue en a si et seulement si Pour toute suite (x_n) d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$.

* Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur E et A une partie dense dans E ($\bar{A} = E$)

Si $f(x) = g(x) \forall x \in A$, alors $f = g$ ($f(x) = g(x) \forall x \in E$).

* Théorème

Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $A \subset E$.

On considère $f : A \rightarrow F$ une application continue. Alors

1) L'image réciproque par f (une application continue) de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A .

2) L'image réciproque par f (une application continue) de tout fermé de F est un fermé relatif de A .

* Remarque :

Si $A = E$ et $f : E \rightarrow F$ est continue. Alors

L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E .

L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E .

* Application :

1) Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$\{x \in E \text{ tel que } f(x) \geq \alpha\}$ est un fermé de E .

$\{x \in E \text{ tel que } f(x) < \alpha\}$ est un ouvert de E .

2) Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire continue, alors $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\})$ est un fermé de E .

* Continuité uniforme

Soient A une partie d'un e.v.n E et $f : A \rightarrow F$

On dit que f est uniformément continue si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in A^2 \text{ avec } \|x - y\|_E < \alpha \text{ alors } \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon$

* Théorème

Soit $f : A \rightarrow F$
Si f est uniformément continue, alors f est continue sur A .

* Application lipschitzienne

Soient A une partie non vide de E et $f : A \rightarrow F$.

Soit $k \in \mathbb{R}_+$, On dit que f est k -lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

On dit que f est **contractante** si elle est k -lipschitzienne avec $k \in [0, 1[$.

* Théorème

Soit $f : A \rightarrow F$ une fonction k -lipschitzienne, alors f est uniformément continue sur A .

* Continuité d'une application linéaire

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes

- i) f est continue sur E
- ii) $\exists M \geq 0, \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E, \forall x \in E$

On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E vers F .

* Corollaire

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, alors les assertions suivantes sont équivalentes

- i) f est continue sur E
- ii) f est continue en 0
- iii) f est bornée sur $B(0, 1)$
- iv) f est bornée sur $S(0, 1)$
- v) $\exists M \geq 0, \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$
- vi) f est lipschitzienne
- vii) f est uniformément continue sur E .

* Compact

Soit $X \subset E$.

On dit que X est compact si pour toute suite (x_n) d'éléments de X , on peut extraire une sous-suite qui converge dans X .

* Théorème

Soit $X \subset E$.

- 1) Si X est un compact de E , alors X est un fermé et borné de E .
- 2) Si X est un compact de E , alors X est un fermé borné.
- 3) Si X est un compact de E , alors A est un compact de E .
- 4) Soit (x_n) une suite d'éléments d'une partie compacte X , alors (x_n) converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

* Proposition

Soit $X \subset E$.

- 1) Soient K_1 et K_2 deux parties compactes de E , alors
 - i) $K_1 \cap K_2$ est un compact de E .
 - ii) $K_1 \cup K_2$ est un compact de E .
- 2) Soient K et H deux parties deux parties compactes de deux e.v.n E_1 et E_2 alors $H \times K$ est un compact de l'espace normé produit $E_1 \times E_2$.
- Si $K_1, \dots, K_p$ sont des parties compactes d'espaces vectoriels normés $E_1, \dots, E_p$ alors $K = K_1 \times \dots \times K_p$ est une partie compacte de l'espace vectoriel normé produit $E = E_1 \times \dots \times E_p$.

* Théorème

Soit $f : E \rightarrow F$ une application

Si $\begin{cases} A \text{ est un compact de } E \\ f \text{ est continue sur } E \end{cases}$, alors $f(A)$ est un compact de F .

✧ Corollaire

Soient A une partie non vide de E

- 1) Si $\begin{cases} f : A \rightarrow F \text{ continue} \\ A \text{ est un compact} \end{cases}$, alors f est bornée.
- 2) Si $\begin{cases} f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \\ A \text{ est un compact} \end{cases}$, alors f est bornée et atteint ses bornes.

(Toute fonction continue sur un compact et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.)

✧ Théorème de Heine

Soient A une partie non vide de E et $f : A \rightarrow F$

- Si $\begin{cases} A \text{ est un compact de } E \\ \text{et} \\ f \text{ est continue sur } E \end{cases}$, alors f est uniformément continue.

(Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.)

✧ Chemin

Soient a et b deux éléments de E . Un chemin continu joignant les points a et b est une application $\gamma : [0; 1] \rightarrow E$ continue vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$

a et b sont les extrémités de γ .

✧ Parties connexes par arcs

- Une partie A de E est dite connexe par arcs si pour tout $a, b \in A$, il existe un chemin inscrit dans X d'extrémités a et b . ($\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ et $\gamma(t) \subset A$)
- Si A est convexe, alors A est connexe par arcs.
- Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
 A est connexe par arcs de si seulement si A est un intervalle de $\mathbb{R}$.

✧ étoilé

- Une partie X de E est dite étoilée s'il existe $a \in X$ vérifiant

$$x \in X, [a, x] \subset X.$$

- Si A est étoilé, alors A est connexes par arcs.

✧ Théorème

- 1) On considère une application $f : E \rightarrow F$ continue sur E .
Si A est une partie connexe par arcs, alors $f(A)$ est connexe par arcs.
- 2) Soit $A \subset E$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.
Si A est une partie connexe par arcs, alors $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

✧ Espaces vectoriels normés de dimension finie

Dans toute cette partie E est un espace vectoriel de dimension finie n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

✧ Normes

- 1) Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors E est normé par les normes suivantes :

$$\bullet \forall x = (x_1, \dots, x_n)_B \in E \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

$$\bullet \forall x = (x_1, \dots, x_n)_B \in E \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

$$\bullet \forall x = (x_1, \dots, x_n)_B \in E \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- 2) Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes.

Topologie

- 1) Soit A une partie de E .
 A est compacte si et seulement si A est fermée et bornée.
- 2) Si H est un sous espace vectoriel de E , alors H est fermé.

Exemple.

En dimension finie $B_r(a, r)$ et $S(a, r)$ sont des fermés.

Proposition

Soit $(U_n)_n$ une suite d'éléments de E ($\dim E = k$) de terme général $U_n = (U_{n,1}, \dots, U_{n,k})_B$ et $l = (l_1, \dots, l_k)_B \in E$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n,k} = l_k, \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

Continuité d'une application linéaire

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé qcq.

Si $f : E \rightarrow F$ est application linéaire, alors f est continue.

Proposition

Soit $E_1, E_2, \dots, E_n$ n K -espace vectoriel normé de dimensions finies et F un K -espace vectoriel normé qcq. Alors toute application multilinéaire $f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ est continue.

Proposition

- Toute fonction polynomiale sur K^p est continue.
- Le déterminant est une fonction polynôme en les coefficients de la matrice, alors

$$\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{K} \text{ est continue.}$$

Série dans un evn de dimension finie

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes dans E .

- On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est convergente dans E . $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$.
- Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, on définit le reste d'ordre n par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

- Si une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- La série $\sum_{n \geq 0} u_{n+1} - u_n$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge.

Série absolument convergente

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes dans E .

- On dit que le série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente si le série $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|$ converge.

- Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle converge et dans ce cas on a :

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$