

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être

Problème 1

On considère l'espace vectoriel $E_0 = \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ tel que } f(0) = 0\}$. On pose

$$E_1 = \{f \in E_0 \text{ tel que } t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \text{ soit intégrable sur }]0, +\infty[\}.$$

$$E_2 = \{f \in E_0 \text{ tel que } t \mapsto (f'(t))^2 \text{ soit intégrable sur }]0, +\infty[\}.$$

Partie I

1. a) Montrer si $f \in E_1$ et $g \in E_1$, alors la fonction $t \mapsto \frac{f(t)g(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
b) Montrer que E_1 est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

$$2. \text{ Pour tout } f \in E_1, \text{ on pose } N_1(f) = \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que N_1 est une norme sur E_1 .

3. a) Montrer que E_2 est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

$$b) \text{ Pour tout } f \in E_2, \text{ on pose } N_2(f) = \left(\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que N_2 est une norme sur E_2 .

Partie II

Dans cette partie, on considère la fonction f suivante :

$$f(t) = \arctan(t), \forall t \in \mathbb{R}_+$$

1. Montrer que $f \in E_1$.

$$2. \text{ Soit } x \in]0, +\infty[. \text{ On pose } h_x : t \mapsto h_x(t) = \frac{1}{(1+t^2)(t^2+x^2)}.$$

Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$, la fonction h_x est intégrable sur $[0, +\infty[$ puis que $f \in E_2$.

$$3. \text{ Pour } x \in]0, +\infty[, \text{ on pose } \varphi(x) = \int_0^{+\infty} h_x(t) dt.$$

- a) Calculer $\varphi(x)$ pour $x \in]0, +\infty[\setminus\{1\}$.

(Ind : Décomposer en élément simple la fraction rationnelle $F(Y) = \frac{1}{(Y+1)(Y+x^2)}$).

4. En admettant que la fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$, donner la valeur de $N_2(f)$.

5. Soit $x \in [0, +\infty[$. On pose $g_x : t \mapsto g_x(t) = \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$.

Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[$, la fonction g_x est intégrable sur $]0, +\infty[$. On pose $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt, \forall x \geq 0$.

6. Justifier que $(N_1(f))^2 = 2G(1)$.

7. Soit $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) dx$.

a)i) Vérifier que $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x)) dx$ et qu'elle est convergente.

ii) Dédurre que $2I = -\frac{\ln(2)\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x)) dx$.

b) Exprimer $N_1(f)$ en fonction de I , puis calculer sa valeur.
(Ind : Utiliser le changement de variable $u = \arctan(t)$).

Partie III

Soit f une fonction quelconque de E_0 . On associe à f les fonctions g et h définies par :

$$g(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t}}, \quad h(t) = \frac{f(t)}{t}, \quad \forall t > 0 \quad \text{et on pose } \beta = f'(0).$$

1. Calculer $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t)$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$. (Exprimer à l'aide de β).

2. Exprimer $f'(t) - \sqrt{t}g'(t)$ en fonction de $h(t)$, $\forall t > 0$.

3. Calculer $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t}g'(t)$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)g'(t)$. (Exprimer à l'aide de β).

4. a) Etablir pour $x > 0$, la relation

$$\int_0^x (f'(t))^2 dt = \frac{1}{2}(g(x))^2 + \int_0^x (\sqrt{t}g'(t))^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^x (h(t))^2 dt.$$

b) Dédurre que si $f \in E_2$ alors pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x (h(t))^2 dt \leq 4 \int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt$$

5. Dédurre que $E_2 \subset E_1$.

6. Montrer que pour $f \in E_2$, on a l'inégalité $N_1(f) \leq 2N_2(f)$.

7. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = e^{-t} \sin(nt)$.

a) Vérifier que $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de E_2 .

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 0$,

$$(f'_n(t))^2 = \frac{n^2 + 1}{2} e^{-2t} + \frac{n^2 - 1}{2} e^{-2t} \cos(2nt) - n e^{-2t} \sin(2nt),$$

puis déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, N_2(f_n) = \frac{n}{2}$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin^2(nt)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

d) Sachant que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-2t} \frac{\sin^2(nt)}{n^2 t^2} dt = 0$.

e) Dédurre que les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.