

Problème "Exponentiel d'une matrice et d'un endomorphisme"

Partie I

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative c'est à dire qui vérifie pour toutes matrices A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que la série $\sum_{p \geq 0} \frac{A^p}{p!}$ est convergente. On note dans la suite $\exp(A)$ sa somme :

$$\exp(A) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!}$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$, $\exp(B)$, $\exp(A)\exp(B)$ et $\exp(A+B)$. Conclure.
3. Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\exp(D)$.
4. a) Soit P une matrice inversible, montrer que la fonction $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Calculer $\exp(A)$ lorsque A est une matrice diagonalisable.
5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ réels deux à deux distincts. On considère l'application :

$$\varphi : \mathbb{R}_{p-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad P \mapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_p))$$

- (a) Montrer que φ est un isomorphisme.
- (b) Dédurre qu'il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $L(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$.
6. On pose pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $L_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}$. Les polynômes $L_1, \dots, L_p$ sont appelés les polynômes de Lagrange en $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.
- (a) Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Donner le degré de L_i et son coefficient dominant.
- (b) Calculer $L_i(\lambda_j)$, $\forall i, j \in \{1, \dots, p\}$.
- (c) Prouver que $\mathcal{B} = (L_1, \dots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.
- (d) En déduire l'expression du polynôme L dans la base $\mathcal{B}$.
7. On suppose dans cette question que A est diagonalisable et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres deux à deux distincts ($p \leq n$).

- (a) Dédurre des questions précédentes que $\exp(A) = L(A)$.
- (b) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ canoniquement associé à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $E_i = \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)$ le sous espace propre de f associée à la valeur propre λ_i et on pose $p_i = L_i(f)$. Démontrer que l'endomorphisme p_i est la projection sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p E_k$.

- (c) Montrer que $\exp(A) = \sum_{i=1}^p e^{\lambda_i} \mathcal{M}(p_i, \mathcal{B}_c)$.

Partie II

Dans cette partie, on considère E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit u un endomorphisme de E ,

- Après avoir justifié l'existence des bornes supérieures, montrer que :

$$\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\|.$$

- On note $|||u||| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

- Montrer qu'il s'agit d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire que :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad |||u \circ v||| \leq |||u||| \cdot |||v|||.$$

- Déduire que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!}$ converge.

On définit l'endomorphisme $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$.

On considère, dans la suite, u un endomorphisme de E dont le polynôme minimal est

$$\Pi_u(X) = (X - 1)^2(X - 2)$$

- Justifier que u est non diagonalisable.
- Vérifier que $E = \ker(u - \text{id}_E)^2 \oplus \ker(u - 2\text{id}_E)$.
- On pose $p = (u - \text{id}_E)^2$ et $q = u \circ (2\text{id}_E - u)$.
 - Calculer $p + q$.
 - Démontrer que p est la projection sur $\ker(u - 2\text{id}_E)$ et parallèlement à $\ker(u - \text{id}_E)^2$, puis caractériser q .
- Soit $x \in E$, montrer que $u(p(x)) = 2p(x)$.
 - Déduire que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k \circ p = 2^k p$. Puis que $\exp(u) \circ p = e^2 p$
- Soit $k \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme $(X - 1)^2$.
 - Déduire que $\exp(u) \circ q = eu \circ q$.
 - Montrer que $\exp(u) = e^2(u - \text{id}_E)^2 - eu^2 \circ (u - 2\text{id}_E)$.