

Montrer que n_1 et n_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 : Norme de Holder

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]1, +\infty[$, $q = \frac{p}{p-1}$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

1) Montrer que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

On note $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et de même pour $\|\cdot\|_q$.

2) Montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$:

a) $\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ où $(x_1, \dots, x_n) = x$ et $(y_1, \dots, y_n) = y$.

b) $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

(Indication : On pourra utiliser l'inégalité $|a + b|^p \leq |a + b|^{p-1}|a| + |a + b|^{p-1}|b|$).

3) En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, appelée norme de Holder.

4) Montrer que $\|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_\infty$, puis déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.