

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation.

Problème

Dans ce problème on considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \{f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$.

A toute fonction $f \in E$ on associe la fonction, notée $\psi(f)$, définie par :

$$\begin{cases} \psi(f)(x) = \frac{\int_0^x f(t)dt}{x}, & \text{si } x > 0 \\ \psi(f)(0) = f(0) \end{cases}$$

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = \int_0^x f(t)dt, x \geq 0$.

Partie I

- Justifier que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que la fonction $\psi(f)$ est un élément de E .
- Montrer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(f)(x) = \lambda$.
- On pose, $\forall x \geq 0, h(x) = xf(x)$.
 - Montrer que $g - \psi(g) = \psi(h)$.
 - En déduire que si f est intégrable sur $]0, +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(h)(x) = 0$.
- Montrer que ψ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .
 - Montrer que ψ est injectif.
 - Déduire que 0 n'est pas une valeur propre de ψ .
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
 - Déterminer les fonctions réelles définies et dérivables sur $]0, +\infty[$ solutions de l'équation différentielle
$$\forall x > 0, \lambda xy'(x) + (\lambda - 1)y(x) = 0 \quad (E).$$
 - Montrer qu'une solution de (E) est prolongeable par continuité à droite en 0 si et seulement si $\lambda \in]0, 1]$.

6. a) Montrer que si $f \in E$ est un vecteur propre de ψ associé à une valeur propre λ , alors f est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et solution de l'équation différentielle (E).
c) Dédurre que si λ est une valeur propre de ψ , alors $\lambda \in]0, 1[$.

Partie II

On pose

$$F = \{f \in E \text{ telle que } f^2 \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+\}.$$

1. a) Montrer que si f et g sont deux éléments de F , alors la fonction $f.g$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
b) Montrer que F est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
c) Montrer que l'application : $(h, k) \mapsto \langle h, k \rangle = \int_0^{+\infty} h(t)k(t) dt$ est un produit scalaire sur F .

Dans la suite de ce problème on désigne par $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle, \rangle$.

2. Soient $f \in F$ et $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, pour $x \geq 0$. a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^2(x)}{x} = 0$.
b) Soit $y > 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{g^2(x)}{x^2}$ est intégrable sur $]0, y]$ et que

$$\int_0^y \psi(f)^2(x)dx = \int_0^y \frac{g^2(x)}{x^2} = -y\psi(f)^2(y) + 2 \int_0^y f(x)\psi(f)(x)dx \quad (1).$$

- c) En déduire que pour tout $y > 0$,

$$\int_0^y \psi(f)^2(x)dx \leq 2 \left(\int_0^y f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^y (\psi(f))^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- d) Conclure que $\psi(f) \in F$ et que $\|\psi(f)\| \leq 2\|f\|$.

3. a) Montrer que ψ est un endomorphisme continu sur $(F, \|\cdot\|)$.

- b) Dédurre que $\sup_{f \in F \setminus \{0\}} \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}$ existe dans $\mathbb{R}_+$.

4. Soit $f \in F$.

- a) En utilisant la formule (1), montrer que $\lim_{y \rightarrow +\infty} y\psi(f)^2(y) = l$ existe et finie dans $\mathbb{R}$.

- b) Dédurre que $l = 0$ et que $\langle \psi(f), \psi(f) \rangle = 2 \langle f, \psi(f) \rangle$.

5. a) Vérifier que, $\forall f \in F$, $\|\psi(f) - 2f\|^2 = 4\|f\|^2 - \|\psi(f)\|^2$.

- b) Dédurre que si $f \in F$ vérifiant $\|\psi(f)\| = 2\|f\|$, alors f est la fonction nulle.

6. Soit $s \in]-1, -\frac{1}{2}[$. On considère la fonction f_s définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_s(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ x^s & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

- a) Montrer que $f_s \in F$ et calculer $\psi(f_s)$.

- b) Calculer $\|f_s\|^2$ et montrer que $\|f_s\|^2 \sim -\frac{1}{2s+1}$.

c) Calculer $\|\psi(f_s)\|^2$ et montrer que $\|\psi(f_s)\|^2 \underset{-\frac{1}{2}}{\sim} -\frac{4}{2s+1}$.

(Ind : utiliser Partie II- 4)

d) Déduire que $\lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\|\psi(f_s)\|}{\|f_s\|} = 2$, puis que $\sup_{f \in F \setminus \{0\}} \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} = 2$

Partie III

1. Montrer que $\forall x \in [0, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ converge.

On admet dans la suite que $\forall x \in [0, 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

2. a) Montrer que pour $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} + \int_0^1 R_n(x) dx$

avec $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{k-1}}{k}$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| \int_0^1 R_n(x) dx \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$.

c) Déduire que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}.$$

d) Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$.

On considère dans la suite la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

3. Vérifier que $f \in F$, $\psi(f) \in F$ et calculer $\psi(f)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$.

4. Montrer que $\langle \psi(f), f \rangle = \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1+x} \right) dx$.

5. a) Montrer que les fonctions $\frac{\ln(1+x)}{x}$ et $\frac{\ln(x)}{1+x}$ sont intégrables sur $]0, 1]$ et que

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x} dx = - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

b) Déduire que $\|\psi(f)\| = \frac{\pi^2}{3}$.