

Problème

Suite de Cauchy

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E est appelée **suite de Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon.$$

L'espace $(E, \|\cdot\|)$ est dit **complet** si pour toute suite de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(E, \|\cdot\|)$, il existe $x \in E$ tel que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans $(E, \|\cdot\|)$.

Partie I

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $(E, \|\cdot\|)$.

1. Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente dans E alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans E .
3. On suppose que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy admettant une sous suite $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans E vers x . Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E vers x .
4. Dédurre que si E est de dimension finie, alors E est complet.

Partie II

On suppose que l'espace $(E, \|\cdot\|)$ est complet et soit A un sous espace fermé non vide de E . Une application $f : A \rightarrow A$ est dite contractante s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que,

$$\forall x, y \in A, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

1. Montrer que toute application contractante de $(E, \|\cdot\|)$ est continue dans $(E, \|\cdot\|)$.
2. Soit $f : A \rightarrow A$ une application contractante, $x_0 \in A$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'éléments de A définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout entier naturel n .
3. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|.$$

4. Dédurre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
5. Montrer que f admet un point fixe c.à.d il existe $a \in A$, tel que $f(a) = a$.

Partie III

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .
2. On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}.$$

- a) Justifier que la suite $\left(S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
- b) Dédurre que la suite (P_n) est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
- c) Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers P pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
 - i) Calculer $P(x)$, $\forall x \in [0, 1]$.
 - ii) Dédurre que $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.