

Devoir à la maison : E.V.N

Exercice 1 Soient $(E, ||.||)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et C un compact, convexe non vide de E on suppose aussi que C est stable par u ($u(C) \subset C$).

Soi $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k$.

1. Montrer que $\forall x_1, x_2, \dots, x_n$ des éléments de C et $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels positifs tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, alors $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in C$
2. Montrer que C est stable par u_n , $\forall n \in \mathbb{N}^*$
3. Soit $x \in u_n(C)$, montrer $||x - u(x)|| \leq \frac{2M}{n}$ avec $M = \sup_{a \in C} ||a||$.
4. Vérifier que $u_n(C)$ un compact, connexe par arcs non vide de E .
5. On considère la suite (x_n) définie par : $x_0 \in C$ et $x_{n+1} = u_n(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
6. Dédurre que u admet un point fixe $a \in C$.

Exercice 2 On note D l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ vérifiant

$$a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

1. Pour $p \in \{1, \dots, n\}$, on considère l'application f_p définie par :

$$f_p : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \longmapsto a_{pp} - \sum_{j=1, j \neq p}^n |a_{pj}|$$

a) Montrer pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, l'application f_p est continue sur $M_n(\mathbb{R})$.

b) En déduire que D est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $A \in D$ et $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$. Montrer que $X = 0$ (Ind : On pourra considérer la composante de valeur absolue maximale du vecteur X).

En déduire que $D \subset GL_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que D est une partie convexe de $M_n(\mathbb{R})$.

4. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \det : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \det(A) \end{aligned}$$

est continue.

5. En déduire que $\det(A) > 0$ pour tout $A \in D$.

6. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ vérifiant

$$a_{ii} \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

7. Montre que $\det(A + \varepsilon I_n) > 0$. En déduire que $\det(A) \geq 0$.

Exercice 3 On muni $M_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par

$$\forall X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y \rangle = {}^tXY.$$

On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire et par $\Omega = M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit l'application R_A , appelée quotient de Rayleigh pour A par :

$$R_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longmapsto \frac{\langle AX, X \rangle}{\|X\|^2}$$

1. Montrer que R_A est continue sur Ω
2. On note $S_n = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}); \|X\| = 1\}$ la sphère unité de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
 - a) justifier que S_n est un compact de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
Vérifier $\forall X \in \Omega, R_A\left(\frac{X}{\|X\|}\right) = R_A(X)$. Comparer $R_A(\Omega)$ et $R_A(S_n)$.
 - c) En déduire que l'application R_A est bornée et atteint ses bornes.
On note $m = \min_{X \in \Omega} R_A(X)$ et $M = \max_{X \in \Omega} R_A(X)$
3. Soit X et Y deux éléments de Ω tels que $X \neq Y$.
 - a) On suppose que la famille (X, Y) est libre.
Justifier que $(1-t)X + tY \neq 0, \forall t \in [0, 1]$.
 - b) On suppose maintenant que la famille (X, Y) est liée. Prouver qu'il existe $Z \in \Omega$ tel que les familles (X, Z) et (Z, Y) soient libres.
 - c) Construire explicitement un chemin continu $\omega : [0, 1] \longrightarrow \Omega$ d'extrémités X et Y . Que peut-on conclure ?
4. En déduire que $R_A(\Omega) = [m, M]$

Problème.

Dans ce problème $(E, \|\cdot\|)$ désigne un e.v.n de dimension finie, A une partie de E et $f : A \longrightarrow A$ une application k -lipschitzienne, c'est à dire : il existe $k > 0$ tel que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|, \quad \forall x, y \in A.$$

Partie I

Dans cette partie, on suppose que f est contractante c'est à dire lipschitzienne avec $k \in]0, 1[$.

On considère la suite $(x_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in A \\ x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|.$$

2) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (x_{n+1} - x_n)$ est convergente.

3) En déduire que la suite converge vers une limite que l'on notera l .

4) Montrer que $l \in A$ et que $f(l) = l$.

5) Montrer que f admet un unique point fixe.

6) Montrer que $n \in \mathbb{N}, \|x_n - l\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|$.

7) a) Montrer que les applications sinus et arctangente sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que le système suivant

$$\begin{cases} 4x = \sin(x + 4) \\ 3y = 3 + 2 \arctan(x - y) \end{cases}$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}^2$.

(Ind : On pourra considérer une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|(x, y)\| = |x| + |y|$).

8) Soit $g : A \longrightarrow A$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que g^p soit k -contractante.

Montrer que g admet un unique point fixe. ($g^p = \underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{p \text{ fois}}$)

Partie II

Dans cette partie A désigne la boule unité fermé de E : $A = \{x \in E \text{ tel que } \|x\| \leq 1\}$ et $f : A \longrightarrow A$ une application 1-lipschitzienne.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie sur A par

$$\forall x \in A, f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)f(x).$$

- 1) Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur A .
- 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet un unique point fixe noté $x_n \in A$.
- 3) En déduire que f admet un point fixe.
- (Ind : On pourra considérer une sous suite de (x_n)).
- 4) A-t-on nécessairement l'unicité du point fixe de f .

Partie III

Dans cette partie, A désigne la boule unité fermée de E , $b \in A$ et u un endomorphisme de E tels que pour tout $x \in A$, $\|u(x) + b\| \leq 1$. On pose alors

$$f : \begin{array}{l} A \longrightarrow A \\ x \longmapsto u(x) + b \end{array}$$

On note pour tout entier non nul n on considère g_n l'application définie par :

$$g_n(x) = \frac{1}{n}(x + f(x) + f^2(x) + \dots + f^{n-1}(x)).$$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad g_n(A) \subset A$.
- 2) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall y \in g_n(A), \quad \|f(y) - y\| \leq \frac{2}{n}.$$

- 3) Soit $a \in A$. Montrer que la suite $(f(g_n(a)) - g_n(a))_{n \geq 1}$ converge vers 0.
- 4) Dédurre que l'application f admet un point fixe.
- 5) Montrer que si x est un point fixe de f , alors $\forall n \in \mathbb{N}$, x est un point fixe de g_n .
- En déduire que l'ensemble $S_f := \bigcap_{n \geq 1} g_n(A)$ est non vide.
- 7) Montrer que S_f est exactement l'ensemble des points fixes de f .