

Partie I

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \geq 0$$

Puisque f est continue sur $[0, +\infty[$, alors g est dérivable sur $[0, +\infty[$, et $g'(x) = f(x)$

$\Rightarrow g'$ est continue.

D'où g est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

$$\forall x > 0, \quad \varphi(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}, \quad \forall x > 0$$

$\Rightarrow \varphi$ est continue sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} \\ &= g'(0) = f(0) = \varphi(f)(0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi$ est continue sur $[0, +\infty[$.

$\Rightarrow \varphi(f) \in E$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda$$

Si $\lambda \neq 0 \Rightarrow f(x) \sim \lambda$

unique λ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$

donc f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

$$\therefore \int_0^x f(t) dt \sim \int_0^x \lambda dt = x \cdot \lambda$$

$$\Rightarrow \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lambda$$

$$\Rightarrow \varphi(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lambda$$

$$\bullet \text{ Si } \lambda = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow f = o(1)$$

λ n'est pas intégrable car $\lambda(+\infty) = \infty$.

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= o\left(\int_0^x 1 dt\right) = o(x) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{a) } h(x) = x f(x)$$

$$\varphi(h)(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Si } x = 0; \quad g(0) - \varphi(g)(0) = g(0) - g(0) = 0 = \varphi(h)(0)$$

$\bullet$ Si $x \neq 0$

$$g(x) - \varphi(g)(x) = g(x) - \frac{\int_0^x g(t) dt}{x}$$

$$\text{or } \int_0^x g(t) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[t g(t) \right]_0^x - \int_0^x t f(t) dt$$

$$\begin{aligned} u &= g(t) & v' &= 1 \\ u' &= f(t) & v &= t \end{aligned} \quad = x g(x) - \int_0^x t f(t) dt$$

$$\Rightarrow g(x) - \psi(g)(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x} \\ = \psi(h)(x), \forall x \neq 0$$

Ainsi $\psi(h) = g - \psi(g)$

b) si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

alors $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lambda$$

D'après e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(g)(x) = \lambda$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} g - \psi(g)(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(h) = 0$$

4) a) $\psi: E \rightarrow E$
 $f \mapsto \psi(f)$

Soient $f, g \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\psi(\alpha f + g)(x) = \frac{\int_0^x \alpha f(t) + g(t) dt}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \\ = \frac{\alpha \int_0^x f(t) dt}{x} + \frac{\int_0^x g(t) dt}{x} \\ = \alpha \psi(f)(x) + \psi(g)(x) \quad \text{si } x \neq 0$$

(2)

$$\text{si } \psi(\alpha f + g)(0) = \alpha f(0) + g(0) \\ = \alpha \psi(f)(0) + \psi(g)(0)$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0, +\infty[; \psi(\alpha f + g)(x) = \alpha \psi(f) + \psi(g)$$

$$\Rightarrow \psi(\alpha f + g) = \alpha \psi(f) + \psi(g)$$

$\Rightarrow \psi$ est linéaire.

et comme $\psi(f)$ est continue sur $[0, +\infty[$

$$\Rightarrow \psi(f) \in E$$

$\Rightarrow \psi$ est un endomorphisme de E .

b) soit $f \in \ker \psi \Leftrightarrow f \in E$ et $\psi(f)$

$$\Leftrightarrow \psi(f)(x) = 0, \forall x \in [0, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt = 0, \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^x f(t) dt = 0, \forall x \geq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow f = 0 \Rightarrow \ker \psi = \{0\}$$

$\Rightarrow \psi$ est injective. $|C| \Rightarrow$ on est pas

5) $\alpha \in \mathbb{R}^*$

a) y solution de (E) sur $]0, +\infty[$

$$\Leftrightarrow y'(x) + \frac{\alpha-1}{x} y(x) = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = \alpha e^{-\frac{\alpha-1}{\alpha} \ln x}, x > 0$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \alpha e^{-\frac{\ln x}{\alpha}} = \alpha e^{\frac{1-\alpha}{\alpha} \ln x}, \quad x > 0$$

$$y(x) = \alpha x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}; \quad x > 0$$

b) y solution de E prolongeable par continuité en 0^+ $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) < \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} < \infty$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \in]0, 1]$$

c) Soit f vecteur propre de φ associée à μ
 $\Leftrightarrow f \neq 0$ et $\varphi(f) = \mu f$
 $f \in E$

$$\forall x > 0; \quad \varphi(f)(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$$

et $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est dérivable sur $]0, +\infty[$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$ " " " "

$\Rightarrow \varphi(f)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\text{Comme } \mu \neq 0 \Rightarrow f = \frac{1}{\mu} \varphi(f)$$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

d) Soit $\lambda \neq 0$, f vecteur propre associé à une valeur propre λ de φ

$$\Leftrightarrow \varphi(f) = \lambda f \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x)$$

d'après a) f est dérivable, d'où

$$f'(x) = \lambda x f'(x) + \lambda f(x)$$

$$\Leftrightarrow \lambda x f'(x) + (\lambda - 1) f(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \alpha x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \quad \forall x > 0$$

Puisque f est continue sur $[0, +\infty[$
 alors d'après 5-16 on doit avoir $\lambda \in]0, 1]$
 Alors l'ensemble des $\lambda \in]0, 1]$.

Partie II

$F = \left\{ f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue tq } f^e \text{ est intég sur } \mathbb{R}_+ \right\}$

1.1. Soit $f, g \in F$, alors $f \cdot g$ est continue et $0 \leq |f \cdot g| \leq \frac{1}{2} (f^e + g^e)$.
Puisque f^e et g^e intég, alors $f \cdot g$ est intég sur $\mathbb{R}_+$.

1.2. $0 \in F$, $F \subseteq E$.
Si $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$(\lambda f + g)$ est continue.

$$\begin{aligned} \text{et } (\lambda f + g)^e &= \lambda^2 f^e + 2\lambda f \cdot g + g^e \\ &= \lambda^2 \underbrace{f^e}_{\text{intég}} + 2\lambda \underbrace{f \cdot g}_{\text{intég}} + \underbrace{g^e}_{\text{intég}} \\ &= \text{intég sur } \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda f + g \in F$$

$\Rightarrow F$ est un s.v. de E .

3. Il est facile à vérifier que
app $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$
est un produit scalaire sur F .

$$2) x \gg 0: g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

$$2.1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^e(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \cdot \frac{g'(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \cdot \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^e(x)}{x} = 0$$

e.e. Soit $y > 0$.
La fonction $x \mapsto \frac{g^e(x)}{x^2}$ est continue sur $[0, y]$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^e(x)}{x^2} = 0 = (f(0))^2$.

$\Rightarrow$ prolongeable par continuité en 0.
Alors $x \mapsto \frac{g^e(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[0, y]$.

$$\int_0^y (f(t))^2(x) dx = \int_0^y \frac{g^e(x)}{x^2} dx$$

$$u = g^e(x)$$

$$u' = 2g(x)g'(x)$$

$$v' = \frac{1}{x^2}$$

$$v = -\frac{1}{x}$$

$$\text{Ipp} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\left[-\frac{g^e(x)}{x} \right]_{\varepsilon}^y + \varepsilon \int_{\varepsilon}^y \frac{2g(x)g'(x)}{x} dx \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g^e(\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{g^e(y)}{y} + \varepsilon \int_{\varepsilon}^y \frac{2g(x)}{x} f(x) dx$$

$$= -\frac{g^e(y)}{y} + \varepsilon \int_0^y f(t)f(x) dx$$

(4)

$$= -y \cdot (\varphi(f))^2 + 2 \int_0^y f(x) \varphi(f)(x) dx$$

2-3/ D'après 2-2.

$$\int_0^y (\varphi(f))^2(x) dx \leq 2 \int_0^y f(x) \varphi(f)(x) dx$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\int_0^y (\varphi(f))^2(x) dx \leq 2 \cdot \left(\int_0^y f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^y (\varphi(f))^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

2-4/ D'après 2/3.

$$\text{Si } \int_0^y (\varphi(f))^2(x) dx = 0 \Rightarrow \varphi(f)(x) = 0 \quad \forall x \in]0, y]$$

puisque $(\varphi(f))^2$ est continue positive.

$$\Rightarrow \varphi(f)(x) = 0, \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \varphi(f) = 0 \in F.$$

Si
alors

$$\begin{aligned} \int_0^y (\varphi(f))^2(x) dx &\neq 0 \\ \left(\int_0^y (\varphi(f))^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leq 2 \left(\int_0^y f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 \cdot \left(\int_0^{+\infty} f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 \cdot \|f\|. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall y \geq 0: \int_0^y (\varphi(f))^2(x) dx \leq 2\|f\|$$

$\Rightarrow$ l'app. $y \mapsto \int_0^y (\varphi(f))^2(x) dx$ est majorée, alors

$$\int_0^{+\infty} (\varphi(f))^2(x) dx < +\infty \quad (\text{car } (\varphi(f))^2 \geq 0)$$

$$\text{et } \left(\int_0^{+\infty} (\varphi(f))^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\|f\|$$

$$\Rightarrow \| \varphi(f) \| \leq 2\|f\|, \quad \forall f \in F$$

$$2-5/ \quad \varphi: F \longrightarrow F$$

$$f \longmapsto \varphi(f).$$

D'après ce qui précède, $\forall f \in F$, $\varphi(f)$ est continue et $(\varphi(f))^2$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, $\Rightarrow \varphi(f) \in F$

$$\text{De plus } \varphi(\lambda f + g)(x) = \frac{\int_0^x \lambda f + g(t) dt}{x}$$

$$\Rightarrow \forall x, \varphi(\lambda f + g)(x) = \lambda \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x)$$

mais pour $x = 0$

$\Rightarrow \varphi$ est linéaire $\Rightarrow \varphi$ endomorphisme de F

De plus $\|\varphi(f)\| \leq 2\|f\|, \quad \forall f \in F$

$\Rightarrow \varphi$ est continu.

⑤ - D'après 1/ puisque $(\varphi(f))^2$ est intégrable

$\Rightarrow \lim_{f \rightarrow 0} g(\varphi(f)) = 0$ est en force.
 si $f \neq 0 \Rightarrow g(\varphi(f)) \sim \frac{1}{\|f\|} \Rightarrow (\varphi(f)) \sim \frac{1}{\|f\|}$ qui n'est pas intég. car $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} = +\infty$
 imp car $\varphi(f) \in F \Rightarrow g(\varphi(f)) \rightarrow 0$
 en passant à la limite qd $y \rightarrow +\infty$
 on obtient:

$$\int_0^{+\infty} (\varphi(f))^2(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cdot \varphi(f)(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \langle \varphi(f), \varphi(f) \rangle = 2 \langle f, \varphi(f) \rangle$$

$$4) \| \varphi(f) - f \|^2 = \langle \varphi(f) - f, \varphi(f) - f \rangle$$

$$= \langle \varphi(f), \varphi(f) \rangle - 2 \langle \varphi(f), f \rangle + \langle f, f \rangle$$

$$= \| \varphi(f) \|^2 - 4 \langle f, \varphi(f) \rangle + \| f \|^2$$

$$= \| \varphi(f) \|^2 - 2 \langle \varphi(f), f \rangle + 4 \| f \|^2 \quad (\text{d'après 3})$$

$$= 4 \| f \|^2 - \| \varphi(f) \|^2 = 4 \| f \|^2 - \| \varphi(f) \|^2$$

b) si $f \in F$ tq $\| \varphi(f) \| = 2 \| f \|$
 $\Rightarrow \| \varphi(f) \|^2 = 4 \| f \|^2 \Rightarrow$
 $\| \varphi(f) - 2f \|^2 = 0 \Rightarrow \varphi(f) = 2f$
 Supp $f \neq 0 \Rightarrow \exists v_p$ de φ ce
 qui est imp car les $v_p \subset J(0,1]$

$$\lambda \in]-1, -\frac{1}{2}[$$

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ x^\lambda & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

f_λ est continue sur $[1, +\infty[$

$$(f_\lambda)^2(x) = x^{2\lambda} = \frac{1}{x^{-2\lambda}}; \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

$$\lambda < -\frac{1}{2} \Rightarrow -2\lambda > 1$$

$\Rightarrow f_\lambda^2$ est intégrable car $v(+\infty)$
 $\Rightarrow f_\lambda^2$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
 Ainsi $f_\lambda \in F$.

$$\| f_\lambda \|^2 = \int_0^{+\infty} f_\lambda^2(x) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^{+\infty} x^{2\lambda} dx$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2\lambda+1} \left[x^{2\lambda+1} \right]_1^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2\lambda+1} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{2\lambda+1} - 1)$$

$$\| f_\lambda \|^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\lambda+1} \quad \begin{matrix} 2\lambda < -1 \\ 2\lambda+1 < 0 \end{matrix}$$

$$⑥ (2\lambda+1) \| f_\lambda \|^2 = \frac{2\lambda+1}{2} - 1 \rightarrow -1$$

$$\| \psi(f_\lambda) \|_2^2 = 2 \langle f_\lambda, \psi(f_\lambda) \rangle$$

$$\text{or } \psi(f_\lambda)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f_\lambda(t) dt, \text{ since } \lambda > 0$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^x t dt \quad \text{si } x \in [0, 1]$$

$$\psi(f_\lambda)(x) = \frac{x}{2}$$

$$\text{si } x \in [1, +\infty[$$

$$\psi(f_\lambda)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f_\lambda(t) dt$$

$$= \frac{1}{x} \left(\int_0^1 f_\lambda(t) dt + \int_1^x f_\lambda(t) dt \right)$$

$$\frac{1}{x} \left(\int_0^1 t dt + \int_1^x t^\lambda dt \right)$$

$$\frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda+1} [x^{\lambda+1} - 1] \right)$$

$$\frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda+1} + \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right)$$

$$\text{Also } \| \psi(f_\lambda) \|_2^2 = 2 \cdot \int_0^{+\infty} f_\lambda(t) \psi(f_\lambda)(t) dt$$

$$= 2 \cdot \left(\int_0^1 f_\lambda(t) \psi(f_\lambda)(t) dt + \int_1^{+\infty} f_\lambda(t) \psi(f_\lambda)(t) dt \right)$$

$$= 2 \left(\int_0^1 \frac{t^2}{2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^\lambda}{x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda+1} + \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right) dt \right)$$

$$= \frac{1}{3} + 2 \left(\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda+1} \right) x^{\lambda-1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{2\lambda}}{\lambda+1} dx \right)$$

$$= \frac{1}{3} + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda+1} \right) \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} [x^\lambda]_1^{+\infty}$$

$$+ 2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{(\lambda+1)(2\lambda+1)} x^{2\lambda+1} \right]_1^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{3} + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda+1} \right) \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^\lambda - 1}{y} \right)$$

$$+ 2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^{2\lambda+1} - 1}{(\lambda+1)(2\lambda+1)}$$

Also

$$\| \psi(f_\lambda) \|_2^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda+1} \right) - \frac{2}{(\lambda+1)(2\lambda+1)}$$

$$(2\lambda+1) \| \psi(f_\lambda) \|_2^2 = (2\lambda+1) \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda+1} \right) \right)$$

$$- \frac{2}{\lambda+1} \xrightarrow{\lambda \rightarrow -\frac{1}{2}} -4$$

On déduit que $\frac{\|\chi(f_s)\|}{\|f_s\|} \underset{s \rightarrow -\frac{1}{2}}{\sim} 2$

Puisque $\frac{\|\chi(f_s)\|}{\|f_s\|} \leq \sup_{f \neq 0} \frac{\|\chi(f)\|}{\|f\|} \leq 2$
 $\lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\|\chi(f_s)\|}{\|f_s\|} = 2$

Alors $\sup_{f \neq 0} \frac{\|\chi(f)\|}{\|f\|} = 2$.

Partie III

$f(x) = \frac{1}{x+1}; x \geq 0$

a) f est continue sur $[0, +\infty[$

$f^2(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \sim \frac{1}{x^2}$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$

$\Rightarrow f$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Alors $f \in L^1$

b) $\chi(f)(0) = f(0) = 1$

$\forall x \neq 0; \chi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$

$$= \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1+t} dt =$$

$$= \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\Rightarrow \chi(f)(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c) \langle f, \chi(f) \rangle &= \int_0^{+\infty} f(x) \chi(f)(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)} dx. \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)} dx$$

$$t = \frac{1}{x}$$

$$dt = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)} dx - \int_1^0 \frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{\frac{1}{t}(1+\frac{1}{t})} \frac{1}{t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)} dx + \int_0^1 \frac{\ln(1+t) - \ln t}{t(1+t)} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) dx - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)} dx - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx$$

Après

$$\langle f, \varphi(f) \rangle = \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln x}{1+x} \right) dx$$

Les fonctions $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ et $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x}$ sont intégrables sur $]0,1[$

$f_1(x) \sim_0 \frac{x}{x} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$
 $\Rightarrow f_1$ prolongeable par continuité en 0 $\Rightarrow f_1$ intég sur $]0,1[$

$$\bullet \sqrt{x} |f_2(x)| = -\sqrt{x} \frac{\ln x}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

$$\Rightarrow f_2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \bullet \text{Puisque } x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ est intég au v.c.}$$

$\Rightarrow f_2$ est intég au v.c.

$\Rightarrow f_2$ est intég sur $]0,1[$

Alors $\langle f, \varphi(f) \rangle = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx$

pour $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx$

IPP $u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$
 $v = \ln(1+x) \quad v' = \frac{1}{1+x}$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln x}{1+x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\left[\ln x (\ln(1+x)) - \int \frac{\ln(1+x)}{x} dx \right]_{\varepsilon}^1 \right)$$

$$= \int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

or $\ln(1+x) \sim_0 x$
 $\Rightarrow \ln(1+x) \ln x \sim_0 x \ln x$

⑨

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx = - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

Ainsi

$$\langle f, \psi(f) \rangle = 2 \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

$$\text{Or } \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in]0,1[$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{n} dx$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{k+1} + R_n(x) \right) dx$$

$$\frac{\ln(x)}{x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 \frac{x^k}{k+1} dx + \int_0^1 R_n(x) dx \quad (*)$$

• V. $x < 1$: $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{k+1}$ est

alternée

$$|U_k| = \left| \frac{x^k}{k+1} \right| \leq \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$\left| \frac{U_{k+1}}{U_k} \right| = \left| \frac{x}{1} \right| \frac{k+1}{k+2} < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} U_k \text{ est T.S.A.}$$

$$\text{Ainsi } |R_n(x)| \leq |U_{n+1}| = \frac{|x^{n+1}|}{n+2}$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^1 R_n(x) dx \right| \leq \int_0^1 |R_n(x)| dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 R_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$n \rightarrow +\infty$ dans $(*)$, on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^1 \frac{x^k}{k+1} dx$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)e} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k e}$$

Puisque $\langle f, \psi(f) \rangle = 2 \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$
 $= 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k e}$