

Correction. Probleme "Suite de Cauchy"

Partie I

1) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers $l \in E$
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, \|x_n - l\| < \varepsilon$
 $\Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}, n+p \geq n_0 \Rightarrow \|x_{n+p} - l\| < \varepsilon$
 $\forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \|x_{n+p} - x_n\| = \|x_{n+p} - l + l - x_n\|$$

$$\leq \|x_{n+p} - l\| + \|l - x_n\|$$

$$\leq 2\varepsilon.$$

D'où la suite (x_n) est de Cauchy.

2) Soit (x_n) de Cauchy $\Leftrightarrow$
 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N},$
 $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon.$

$$\Rightarrow \|x_{n_0+p} - x_{n_0}\| < \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}.$$

$$\|x_{n_0+p}\| \leq \|x_{n_0+p} - x_{n_0}\| + \|x_{n_0}\|$$

$$\leq \varepsilon + \|x_{n_0}\|$$

$$\Rightarrow \|x_k\| \leq \varepsilon + \|x_{n_0}\|, \forall k \geq n_0.$$

De plus $\forall 0 \leq k \leq n_0$: $\|x_k\| \leq \max_{0 \leq k \leq n_0} \|x_k\|$

insi $\forall k \in \mathbb{N}$.

$$\|x_k\| \leq \max(\varepsilon + \|x_{n_0}\|, \max_{0 \leq k \leq n_0} \|x_k\|)$$

D'où la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée

32

3) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans E .
 et $(x_{\phi(n)})$ sous suite de (x_n) tq $x_{\phi(n)} \rightarrow x \in E$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, \|x_{\phi(n)} - x\| < \varepsilon.$$

et on a (x_n) de Cauchy $\Rightarrow$

$$\text{Pour } \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$$

soit $n_0 = \max(n_0, n_1).$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0, \Rightarrow n \geq n_0 \Rightarrow \phi(n) \geq n_0$$

(car $\phi(n) \geq n$)

$$\Rightarrow \|x_{\phi(n)} - x_n\| < \varepsilon.$$

$$\text{Ainsi } \forall n \geq n_0, \|x_n - x\| = \|x_n - x_{\phi(n)} + x_{\phi(n)} - x\|$$

$$\leq \|x_n - x_{\phi(n)}\| + \|x_{\phi(n)} - x\|$$

$$\leq 2\varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x.$$

4) si E de dimension finie.

Soit (x_n) une suite de Cauchy dans E .

D'après 2) (x_n) est bornée.

Comme $\dim E < \infty$; alors d'après le th de

Bolzano-Weierstrass (x_n) admet au moins

une valeur d'adhérence $\Leftrightarrow \exists (x_{\phi(n)})$ s. suite
 de (x_n) tq $x_{\phi(n)} \rightarrow x \in E$

①

D'après 3/ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in E$

Partie II

1) f est contractante $\Leftrightarrow \exists k \in [0, 1[$ tq
 $\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|, \forall x, \forall y \in A$.

- Si $k = 0 \Rightarrow f(x) = f(y), \forall x, \forall y \in A$

D'où $f = \text{cte} \Rightarrow f$ est continue sur A .

- Si $k \neq 0$.
 $\forall x_0 \in A: \forall x \in A, \|f(x) - f(x_0)\| \leq k \|x - x_0\|$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists d = \frac{\varepsilon}{k} > 0$ tq $\forall x \in A$ avec
 $\|x - x_0\| < d \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$.

$\Rightarrow f$ est continue en $x_0, \forall x_0 \in A$

$\Rightarrow$ " " sur A .

2) soit $n \in \mathbb{N}; p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &= \left\| \sum_{k=n}^{n+p-1} (x_{k+1} - x_k) \right\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|x_{k+1} - x_k\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} k \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{k^n (1 - k^{n+p})}{1 - k} \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{k^n}{1 - k} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

(2)

N.B. On montre par récurrence que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|; \forall n \in \mathbb{N}.$$

1) On a $k \in [0, 1[\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon' > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0, k^n < \varepsilon'$

$$\forall p \in \mathbb{N}; \|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1 - k} \|x_1 - x_0\|$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}; \|x_{n+p} - x_n\| < \frac{\varepsilon'}{1 - k} \|x_1 - x_0\|$$

- Si $\|x_1 - x_0\| = 0 \Rightarrow$ vérifié.

- Si $\|x_1 - x_0\| \neq 0$; on choisit $\varepsilon' = \frac{\varepsilon \cdot (1 - k)}{\|x_1 - x_0\|}$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}; \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$$

$\Rightarrow (x_n)$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$

Puisque $(E, \|\cdot\|)$ est complet, alors

$$\exists x \in E \text{ tq } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

5) Soit $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

et f est une app de $A \rightarrow A$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; x_n \in A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \bar{A}$$

Comme A est fermé, alors $\bar{A} \subset A$

$$\Rightarrow x \in A$$

D'autre part f est continue sur A et

$$x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow$$

Par passage à la limite, on obtient
 $f(x) = x$.

unicité
 $\sup \exists y \in A \text{ tq } f(y) = y$.

$$\text{ona } \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$$

$$\Rightarrow \|x - y\| \leq k \|x - y\|$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(k-1)}_{< 0} \|x - y\| \geq 0$$

$$\Rightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Partie III

$$\|P\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|, \quad \forall P \in \mathbb{R}[X] = E$$

1) Soit $P \in E$; $\|P\|_\infty = 0 \Leftrightarrow$

$$\sup_{x \in [0,1]} |P(x)| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [0,1]; P(x) = 0$$

$\Rightarrow \forall x \in [0,1]; x$ est une racine de P

$\Rightarrow P$ admet une infinité de racines.

$$\Rightarrow P = 0$$

ii) Soit $P \in E, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|\lambda P\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |\lambda P(x)| = |\lambda| \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$$

$$= |\lambda| \cdot \|P\|_\infty$$

iii) Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$\forall x \in [0,1]: |(P+Q)(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)|$$

$$\leq \sup_{x \in [0,1]} |P(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |Q(x)|$$

$$\leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |(P+Q)(x)| \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$$

$$\Leftrightarrow \|P+Q\|_\infty \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$$

cl $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .

e) a) $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ona (S_n) est une suite cv vers e .

$\Rightarrow (S_n)$ de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

b) Soit $\varepsilon > 0$ et

$$\|P_{n+p} - P_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!} \right\|$$

$$\text{or } \forall x \in [0,1]: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow \|P_{n+p} - P_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!}$$

D'autre part puisque la suite (S_n) est de Cauchy. $\Rightarrow$

Pour $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$\|S_{n+p} - S_n\| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!} \right| < \varepsilon.$$

Ainsi pour $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $\forall p \in \mathbb{N}$ $\|P_{n+p} - P_n\|_\infty < \varepsilon$.

$\Rightarrow (P_n)$ de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

c) Supposons qu'il existe $P \in E$ tq.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \text{ pour } \|\cdot\|_\infty \Rightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $\|P_n - P\|_\infty < \varepsilon$

$$\sup_{x \in [0,1]} |P_n(x) - P(x)| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $\|P_n(x) - P(x)\| < \varepsilon$ $\forall x \in [0,1]$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = P(x), \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow P(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

$$\Rightarrow P(x) = e^x, \forall x \in [0,1]$$

(4)

ii) On a. (P_n) est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ si elle cv vers P , alors d'après i)

On aura $P(x) = e^x$, $\forall x \in [0,1]$

qui n'est pas un polynôme $\Rightarrow P \notin E$

Ainsi $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.