

Def

$\forall x \in A, \forall y \in A$

$\exists \gamma: [0,1] \rightarrow A$ continue

$\gamma(0) = x$

$\gamma(1) = y$

$\forall t \in [0,1], \gamma(t) \in A$

Dans $\mathbb{R}$: $I =$ Connex par arcs

Converc. $\Leftrightarrow$ étoilés
= intervalle

ACE,
A est Connex par arcs

Si $f: ACE \rightarrow F$ continue
et A Connex par arcs $\hookrightarrow E$
Alors $f(A)$ est Connex par arcs $\hookrightarrow F$

T.V.S.

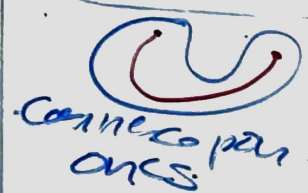
Si $F = \mathbb{R}$

Alors $f(A) =$ intervalle $\hookrightarrow \mathbb{R}$
 $\forall a \in A, \forall b \in A \Rightarrow$
 $[f(a), f(b)] \subset f(A) =$ intervalle

$\Rightarrow \forall x, y \in [f(a), f(b)], \exists c \in A$
 $\hookrightarrow y = f(c)$

Si A est étoilé ou converc.
Alors $f(A)$ est Connex par arcs

Si $f: E \rightarrow F$ linéaire
et A converc, alors
 $f(A)$ converc

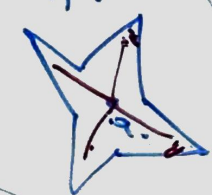


Connex par arcs

rien par Connex par arcs

Si A Converc, alors A Connex par arcs

A est étoilé
 $\forall a \in A, \forall x \in A$
 $[xa] \subset A$



$\forall x \in A, [xa] \subset A$

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} x + y - y = y \\ & \frac{dy}{dx} x + y - y = y \\ & \frac{dy}{dx} x + y - y = y \end{aligned}$$

si A est étoilé, alors A est connexe par arcs

Soit $x, y \in A$.

$\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow A$.

$$t \mapsto \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(et) = \gamma_1(et) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow et \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(et-1) = \gamma_2(et-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \Rightarrow et-1 \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

$$\gamma(0) = x$$

$$\gamma(\frac{1}{2}) = \gamma_1(1) = a = \gamma_2(0)$$

$$\gamma(1) = y$$

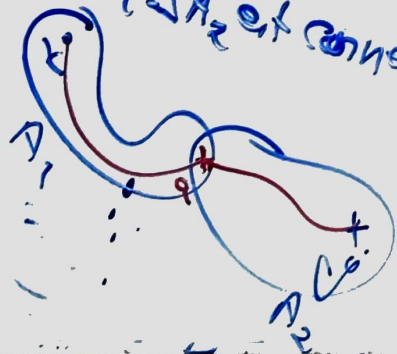
γ continue, et $\forall t \in [0, 1], \gamma(t) \in A$

Exercice

Soit A_1 et A_2 deux connexes par arcs.

tg. $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

tg. $A_1 \cup A_2$ est connexe par arcs.



Exemples

1) $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
 $= \{z \in \mathbb{C} ; \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ et } z = e^{i\theta}\}$

$$U = f(\mathbb{R})$$

avec $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $\theta \mapsto e^{i\theta}$

f est continu et $\mathbb{R}$ connexe par arcs de $\mathbb{R}$.
 $\Rightarrow f(\mathbb{R}) = U =$ connexe par arcs de $\mathbb{C}$.

2) $N =$ l'ensemble des matrices nilpotentes
est étalé par rapport à O_n

3) $D =$ l'ensemble des matrices diagonalisables
étalé.

3) $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$
n'est pas connexe par arcs

Car

$$\forall A \in O_n(\mathbb{R}); \det A \in \{-1, 1\}$$

$$\Rightarrow \det(O_n(\mathbb{R})) \subset \{-1, 1\}$$

$$1 = \det(I_n) \text{ et } I_n \in O_n(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow 1 \in \det(O_n(\mathbb{R}))$$

$$-1 = \det \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \det(O_n(\mathbb{R}))$$

$$\Rightarrow \det(O_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\}$$

$\text{Supp } O_n(\mathbb{R})$ connexe par arcs
et $\det$ continu. Car...

$$\Rightarrow \det(O_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\} \text{ connexe par arcs}$$

absolu.

Exercice - "DT" Analyse 2022

$$D = \{ A = (a_{ij}) \mid a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \forall i \in \{1, \dots, n\} \}$$

$$\text{Soit } f_p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$A = (a_{ij}) \mapsto f_p(A) = a_{pp} - \sum_{j=1, j \neq p}^n |a_{pj}|$$

On suppose que f_p est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$|f_p(A) - f_p(B)| = |a_{pp} - b_{pp} - \sum_{j=1, j \neq p}^n |a_{pj}| + \sum_{j=1, j \neq p}^n |b_{pj}||$$

$$\leq |a_{pp} - b_{pp}| + \sum_{j=1, j \neq p}^n ||a_{pj}| - |b_{pj}||$$

$$\leq \sum_{j=1}^n |a_{pj} - b_{pj}|$$

$$\leq \|A - B\|_\infty$$

$$\text{avec } \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$\Rightarrow f_p$ -lip $\Rightarrow$ continue

Autrement:

$$\text{Soit } g_{ij} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A = (a_{ij}) \mapsto g_{ij}(A) = a_{ij}$$

g_{ij} est linéaire $\Rightarrow$ continue

Donc $|g_{ij}|$ est continue

$$\text{Donc } f_p = g_{pp} - \sum_{j=1, j \neq p}^n |g_{pj}| \text{ est continue.}$$

$$2) D = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid f_i(A) > 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \}$$

$$= \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid f_i(A) \in]0, \infty[, \forall i \in \{1, \dots, n\} \}$$

$$D = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(]0, \infty[)$$

f_i est continue $\Rightarrow f_i^{-1}(]0, \infty[)$ ouvert.

$]0, \infty[$ ouvert

3) $x \neq 0$
 $x_{i_0} = \max \{ |x_i| \mid i \in \{1, \dots, n\} \}$
 $AX = 0 \Rightarrow (AX)_{i_0} = 0$

$$\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j = 0$$

$\Rightarrow$ ~~trivial~~

$\Rightarrow \ker A = \{0\} \Rightarrow A$ inversible

$\Rightarrow D \subset GL_n(\mathbb{R})$

$$x \in \bigcup_{i=1}^n A_i \Leftrightarrow$$

$$\exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ tq } x \in A_i$$

3) Pq D Converge.

soit $A, B \in D$ et $d \in [0, 1]$

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

$$b_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{ij}|$$

si $d \neq 0$ et $d \neq 1$

$$\Rightarrow d a_{ii} + (1-d) b_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n d |a_{ij}| + (1-d) |b_{ij}|$$

$$\Rightarrow d A + (1-d) B \in D$$

si $d=0 \Rightarrow d A + (1-d) B = B \in D$

$d=1$
 $\Rightarrow d A + (1-d) B = A \in D$

$\Rightarrow \forall d \in [0, 1], d A + (1-d) B \in D$
 $\Rightarrow D$ Converge.

u) det - - -

5) $D \subset GL_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \det(D) \in \mathbb{R}^*$

et si D Converge $\Rightarrow$ Connexe par arcs.

et $\det$ est continue à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \det(D) = \text{Connexe par arcs de } \mathbb{R}$
 $= \text{intervalle } \subset \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow \det D \subset]0, \infty[$

et si $\det D \subset]0, \infty[$

et si $\det(I_n) = 1 > 0$
 $I_n \in D$

$\Rightarrow \det D \subset]0, \infty[$

g) Soit $A = (a_{ij})$ tq $a_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}$

$\varepsilon > 0$; $B = A + \varepsilon I_n = (b_{ij})$

$$b_{ii} = a_{ii} + \varepsilon > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij}$$

$$\Rightarrow B \in D \Rightarrow \det B > 0$$

$$\Leftrightarrow \det(A + \varepsilon I_n) > 0.$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A + \varepsilon I_n = A.$$

et $\det$ est continue $\Rightarrow$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overbrace{\det(A + \varepsilon I_n)}^{> 0} = \det A.$$

$$\Rightarrow \det A \geq 0.$$

Exercice 3. Algèbre self

$n \geq 2$; $\Omega = M_{n,2}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

1) Rq. $R_A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}$

est continue

$x \mapsto \|x\|$ est 1-lip $\Rightarrow$ continue.

$x \mapsto \|x\|^2$ est continue sur $M_{n,2}(\mathbb{R})$.

Rq. $f: M_{n,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$

soit $g: M_{n,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n,2}(\mathbb{R}) \times M_{n,2}(\mathbb{R})$
 $x \mapsto (Ax, x)$

g est linéaire
 des $M_{n,2}(\mathbb{R}) \times M_{n,2}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ continue.

L'appl. $\langle \cdot, \cdot \rangle: M_{n,2}(\mathbb{R}) \times M_{n,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$

est bilinéaire $\Rightarrow$ continue.
 donc $M_{n,2}(\mathbb{R}) \times M_{n,2}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow f = h \circ g$ est continue sur $M_{n,2}(\mathbb{R})$

Alors R_A est continue sur $M_{n,2}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

2) $S_n = \{x \in M_{n,2}(\mathbb{R}) ; \|x\| = 1\}$

a) S_n est un fermé et borné de $M_{n,2}(\mathbb{R})$
 qui est de dimension finie, alors S_n compact.

* $R_A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = R_A(x)$

* Rq. $R_A(S_n) = R_A(\Omega)$

car $S_n \subset \Omega \Rightarrow R_A(S_n) \subset R_A(\Omega)$

$$\text{si } y \in R_A(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \text{ tq } y = R_A(x) \\ = R_A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \\ \in R_A(S_1) \subset R_A(S_n)$$

$$\Rightarrow R_A(\mathbb{R}) \subset R_A(S_n)$$

$$\text{Donc } R_A(S_n) = R_A(\mathbb{R})$$

c) $\begin{cases} R_A \text{ est continue sur } S_n \text{ à valeurs dans } \mathbb{R} \\ S_n \text{ compact } \neq \emptyset \end{cases}$

$\Rightarrow R_A$ est bornée et atteint ses bornes sur S_n .

$$\max_{x \in S_n} R_A(x) \quad \text{vrai}$$

$$\max_{x \in S_n} R_A(x) \quad \text{vrai}$$

$$\max_{x \in S_n} R_A(x) \quad \text{vrai}$$

d) $\Rightarrow$

$$\min_{x \in S_n} R_A(x) \quad \text{vrai}$$

3) x et $y \in \mathcal{A}$.

a) $\sigma_1(x, y)$ est libre.

Supp. $\exists t_0 \in [0, 1]$ tel que $t_0 x + (1-t_0)y = 0$

$$\Rightarrow t_0 = 0 \Rightarrow t_0 = 0 = 1 \text{ up} \\ \text{et } 1-t_0 = 0$$

$\Rightarrow \forall t \in [0, 1]; t x + (1-t)y \neq 0$.

b) $\sigma_1(x, y)$ est liée.

Rq $\exists z \neq 0$ tel que (x, z) et (z, y) libres.

Supp. $\forall z \neq 0; (x, z)$ liée ou (z, y) liée.

$\downarrow (x, y)$ liée $\downarrow$
 (y, z) liée (z, x) liée

$\Rightarrow \forall z \neq 0; z \in \text{vect}(x) = \text{vect}(y)$

$\Rightarrow \text{Rq}_1(\mathcal{A}) \subset \text{vect}(x)$
 $\Rightarrow \dim \text{Rq}_1(\mathcal{A}) \leq \dim \text{vect}(x)$
 $\Rightarrow \dim \mathcal{A} \leq 1$

c) soit $x, y \in \mathcal{A}$.

1^{er} cas $\sigma_1(x, y)$ libre

$\exists w: [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}$

$$t \mapsto w(t) = t x + (1-t)y$$

w continue.

$$w(0) = y$$

$$w(1) = x$$

$w(t) \in \mathcal{A} \forall t \in [0, 1]$ (diapason)

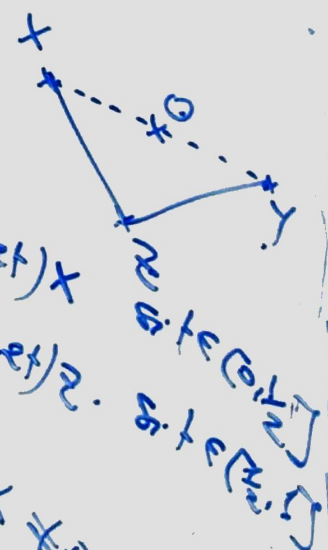
2^{em} cas (x, y) liée.

$\exists w: [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}$

$$t \mapsto w(t) = \begin{cases} z t z + (1-z t) x & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (z t - z) y + (z - z t) z & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$\forall t \in [0, \frac{1}{2}]; z t z + (1-z t) x \neq 0$
 et on a (z, x) libre $\Rightarrow z t z + (1-z t) x \neq 0$

$t \in [\frac{1}{2}, 1]; z t - z \neq 0$ et $z - z t \neq 0$
 $w(0) = x$
 $w(1) = y$
 w continue.



On déduit S est connexe par arcs.

4.) $\left\{ \begin{array}{l} R_A \text{ est continue à valeurs dans } \mathbb{R} \\ S \text{ est connexe par arcs.} \end{array} \right.$

$\Rightarrow R_A(S)$ est connexe par arcs de $\mathbb{R} = \underline{\text{L'ensemble } \mathbb{R}}$

De plus $R_A(S)$ borné et atteint ses bornes.

$\Rightarrow R_A(S) = [m, M]$.

Exercice 1

C Converge; $\forall x_k - x_n \in C$

Soit $d_1, \dots, d_n \in [0, 1]$ avec $\sum_{i=1}^n d_i = 1$

Alg. $\sum_{i=1}^n d_i x_i \in C$.

Par récurrence

Pour $n=1$, vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat est vrai pour n et montrons pour $n+1$.

$x_1, \dots, x_{n+1} \in C$
 $d_1, \dots, d_{n+1} \in [0, 1]$ et $\sum_{i=1}^{n+1} d_i = 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} d_i x_i &= \sum_{i=1}^n d_i x_i + d_{n+1} x_{n+1} \\ &= (1 - d_{n+1}) \left(\sum_{i=1}^n d_i x_i \right) + d_{n+1} x_{n+1} \end{aligned}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n d_i x_i}{1 - d_{n+1}} = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

$$\text{car } p_i = \frac{d_i}{1 - d_{n+1}}$$

$$\text{car } \sum_{i=1}^n p_i = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{1 - d_{n+1}} = 1$$

$$\text{et } x_1, \dots, x_n \in C = \text{Converge}$$

$$\text{H.R.} \Rightarrow y = \sum_{i=1}^n p_i x_i \in C$$

$$\text{et donc } x_{n+1} \in C$$

$$\Rightarrow (1 - d_{n+1}) y + d_{n+1} x_{n+1} \in C$$

$$\begin{aligned} * \text{ si } d_{n+1} = 1 &\Rightarrow d_1 = \dots = d_n = 0 \\ &\Rightarrow x_{n+1} \in C \end{aligned}$$

$$5) \begin{cases} x_0 = C \\ x_{n+1} = U_n(x_n) \end{cases}$$

Par recurrence. $x_n \in C, \forall n \in \mathbb{N}$.

$(x_n) \subset C = \text{Compact}$.

$\Rightarrow \exists (x_{\varphi(n)})$ s. suite de (x_n) q $x_{\varphi(n)} \rightarrow a \in C$.

$$x_{\varphi(n)+1} = U_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})$$



$$x_{\varphi(n)+1} = U_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \in U_{\varphi(n)}(C)$$

$$\Rightarrow \|x_{\varphi(n)+1} - a\| \leq \frac{2\pi}{\varphi(n)+1} \rightarrow 0$$

Continu
 $x_{\varphi(n)+1} \rightarrow a$