

Série I : Espace vectoriel normé

✗ **Exercice 1** Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$. On considère les applications N_1 et N_2 définies par :

$$\forall f \in E, N_1(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx.$$

1) Montrer que les applications N_1 et N_2 sont des normes sur E .

2) Montrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Ind Considérer la suite (f_n) définie par :
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

3) On considère $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de classe C^1 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. a) Montrer que l'application $n : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$n_1(f) = \left[|f(0)|^2 + \int_0^1 (f')^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur E .

b) Soit F le s.e.v. de E des fonctions nulles en 0. Pour $f \in F$ on pose :

$$n_2(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) + f'(t)|$$

Montrer que n_2 est une norme sur F . et que n_1 et n_2 ne sont pas équivalentes.

Exercice 2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels 2 à deux distincts. On pose, pour P dans E ,

$$N_1(P) = \int_0^1 |P(x)| dx, \quad N_2(P) = \sum_{k=0}^n |P(a_k)|.$$

1) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E .

2) Soit $B = \{P \in E; \int_0^1 |P(x)| dx = 2\}$.

Montrer que B est un fermé de E .

✗ **Exercice 3** Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

On pose $E = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue tel que } f^2 \text{ est intégrable sur } I\}$.

1) Montrer que Si f et g sont deux éléments de E , alors la fonction fg est intégrable sur I .

2) Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

3) Montrer que L'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto \int_I f(t)g(t) dt$$

définit un produit scalaire sur E .

$$N_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$$

4) Dédire que l'application $f \mapsto \left(\int_I (f(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur E .

5) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge et que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \frac{1}{e\sqrt{2}}$.

Exercice 4 "trois normes sur l'espace des suites"

1) Soit $l^\infty(IK) = \{(u_n)_n \text{ suite d'éléments dans } IK \text{ bornée}\}$

Pour $(u_n)_n \in l^\infty$, on pose

$$\|(u_n)_n\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

Montrer que l'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $l^\infty(IK)$.

2) On considère

$l^1(IK) = \{(u_n)_n \text{ suite d'éléments dans } IK \text{ tel que la série } \sum_{n \geq 0} |u_n| \text{ converge}\}.$

Pour $(u_n)_n \in l^1$, on pose

$$\|(u_n)_n\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Montrer que l'application $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur $l^1(IK)$.

3) Soit

$l^2(\mathbb{R}) = \{(u_n)_n \text{ suite d'éléments dans } \mathbb{R} \text{ tel que la série } \sum_{n \geq 0} (u_n)^2 \text{ converge}\}.$

a) Montrer que si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux éléments de l^2 , alors la série

$\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ converge.

b) Montrer que $l^2(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

c) Montrer que l'application $((u_n)_n, (v_n)_n) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ définit un produit

scalaire sur l^2 .

d) Dédurre que l'application $(u_n)_n \mapsto \left(\sum_{n=0}^{\infty} (u_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur $l^2(\mathbb{R})$.

✶ Exercice 5 "Normes sur $M_{n,p}(K)$ ".

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in M_{n,p}(K)$. On pose

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\text{tr}(^t A A)} \quad IK = \mathbb{R}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}|$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $M_n(IK)$ et que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$. Pour tout $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$, on pose
2. Montrer que pour tout $A, B \in M_p(K)$, on a $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.
3. Montrer que pour tout $A, B \in M_p(K)$, on a $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

✶ Exercice 6 (D'après concours MP2 2010 Alg)

$\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée $\|\cdot\|$. Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\| = 1\}$$

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

1) Montrer pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$ et pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\|AX\| \leq \|X\| \|A\|$$

2) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$

3) Montrer que pour tout A et B dans $M_n(\mathbb{R})$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

4) Soient $U \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale ($^t U U = I_n$) et $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\|AU\| = \|UA\| = \|A\|$$

5) Montrer pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\rho(A) \leq \|A\|$

6) Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\|B\| < 1$. On pose $S_N = \sum_{k=0}^N B^k$

- a) Montrer que la suite (S_N) est convergente dans $M_n(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|$. On note S sa somme
- b) Montrer que $I - B$ est inversible et que son inverse est S .
- c) Montrer que si $I - B$ n'est pas inversible, alors $\|B\| \geq 1$.

Exercice 7 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. On rappelle qu'une partie A de E est convexe si :

$\forall (x, y) \in A \times A$ et $\lambda \in [0, 1]$ le segment $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1]\}$ est inclus dans A .

$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n, \|y - x\| < r\}$ la boule ouverte de centre x et de rayon r .

1) Vérifier qu'une boule ouverte de E $B(x, r)$ est convexe.

2) Montrer que si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

(Ind : utiliser la caractérisation séquentielle des points adhérents).

3) On se propose de démontrer que si A convexe alors A° est convexe :

Soit $(x, y) \in A^\circ \times A^\circ$, $\lambda \in [0, 1]$ et $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$

a) Vérifier qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$ et $B(y, r) \subset A$.

b) Montrer que : pour tout $u \in B(z, r)$ on a :

$u + (1 - \lambda)(x - y) \in B(x, r)$ et $u + \lambda(y - x) \in B(y, r)$.

En déduire que $B(z, r) \subset A$ et conclure que A° est convexe.

Exercice 8 On considère $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties de E .

1. a) Montrer que si $A \subset B$, alors $A^\circ \subset B^\circ$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.

b) i) Montrer que $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ et $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$.

ii) A-t-on $A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$?

c) i) Montrer que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

ii) A-t-on $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$?

2. Déterminer, en justifiant, l'intérieur, l'adhérence et la frontière des ensembles suivants :

$A =]a, b]$, $B = \mathbb{Q}$ et $C = \mathbb{Z}$.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Montrer que pour $\alpha > 0$, il existe ε vérifiant $0 < |\varepsilon| < \alpha$ et $A + \varepsilon I_n$

est inversible.

b) Déduire que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9

Soit $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Pour $p \in]1, +\infty[$, on pose

$L^p(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue; } f^p \text{ est intégrable sur } I\}$.

1. Montrer que pour $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$, $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

2. a) Montrer que $\forall x \in I$, $|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$.

b) En déduire que $L^p(I)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

3. Montrer que si $f \in L^p(I)$ et $g \in L^q(I)$, alors fg est intégrable sur I .

4. Soient $f \in L^p(I)$ et $g \in L^q(I)$. Montrer que

$$\left| \int_I f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

5. Soient $f \in L^p(I)$ et $g \in L^p(I)$.

a) Montrer que $(f + g)^{p-1} \in L^q(I)$.

b) Montrer que

$$\left(\int_I |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

6. Déduire que l'application $f \mapsto N_p(f) = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $L^p(I)$.

Exercice 10 On considère E et F deux e.v.n

1) Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que A et B sont des compacts

respectivement de E et F si et seulement si $A \times B$ est un compact de $E \times F$.

2) Soient $A \subset E$ et $f : A \rightarrow F$ une fonction continue. On pose $\text{Gr}(f) = \{(x, f(x)), x \in A\}$ le graphe de f .

- a) Montrer que si A est un fermé de E , alors $\text{Gr}(f)$ est un fermé de $E \times F$
 b) Montrer $\text{Gr}(f)$ est un fermé de $E \times F$ ssi A est un compact de E .

Exercice 11 Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose, pour P dans $\mathbb{R}[X]$,

$$N(P) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!}$$

1) Montrer que N est une norme sur E .

2) Soit D l'application de dérivation définie par :

$$\begin{aligned} D : E &\rightarrow E \\ P &\rightarrow P' \end{aligned}$$

L'application D est-elle continue ?

3) Soit Ψ_n l'application définie par :

$$\begin{aligned} \Psi_n : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow P^{(n)}(0) \end{aligned}$$

a) Montrer que Ψ_n est continue.

b) Calculer la norme de Ψ_n .

4) On dit que f précède g avec f et g dans E et on note $f < g$, lorsque quel que soit l'entier n , on a : $f^{(n)}(0) \leq g^{(n)}(0)$. Soit $g \in E$ et l'on pose : $G = \{f \in E \text{ tel que } f < g\}$. Montrer que G est fermé.

Exercice 12 Le but de cet exercice est de montrer que dans un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Soit E un K -e.v.n de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On considère $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur E . On pose

$$\text{pour tout } x \in E \text{ avec } x = \sum_{k=1}^n x_k e_k, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

1) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E

2) a) Montrer qu'il existe $c > 0$ telle que $\|x\| \leq c\|x\|_\infty, \forall x \in E$.

b) En déduire que l'application : $\text{id} : (E, \|\cdot\|_\infty) \xrightarrow{x \mapsto x} (E, \|\cdot\|)$ est continue.

c) On pose $S = \{x \in E \text{ tel que } \|x\|_\infty = 1\}$.

Montrer que S est un compact dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

4) Montrer que l'application $f : (E, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \|x\|$ est continue.

5) a) Montrer que $\alpha = \inf_{x \in S} \|x\|$ existe et que $\alpha > 0$.

b) Dédire que $\forall x \in E, \alpha\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq c\|x\|_\infty$.

6) En déduire que toutes les normes sur E sont équivalentes.

Exercice 13 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n . Pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

1) Montrer que l'application N définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2) Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$N(AB) \leq N(A)N(B).$$

3) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \text{ tel que } \lambda \text{ est une valeur propre de } A\}$$

a) Montrer que, $\forall \lambda$ valeur propre de A et $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$|\lambda|^k \leq N(A^k).$$

b) On suppose que A est diagonalisable. Montrer que :

$$\rho(A) < 1 \iff \lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0.$$

4) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme N . Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit Ψ_B l'application définie par :

$$\begin{aligned} \Psi_B : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A &\longmapsto AB \end{aligned}$$

a) Montrer que Ψ_B est continue et calculer sa norme.

b) Soit :

$$F = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ tel que } AB = \bar{0}\}.$$

Montrer que $\bar{F} = F$ et $\dot{F} = \emptyset$.

c) Soit :

$$G = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ tel que } \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, |a_{ij}| \leq 1\}$$

Montrer que G est un compact.

En déduire qu'il existe une matrice $A_0 \in G$ telle que :

$$\max_{A \in G} N(\Psi_B(A) - A) = N(\Psi_B(A_0) - A_0).$$

5) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$N(D) < 1$$

a) Montrer qu'il existe une unique matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$SD = I_n + S.$$

b) En déduire que $(D - I_n)$ est inversible.

Exercice 14 On considère $E \doteq (C[0, 1], \mathbb{R})$ et on définit les normes suivantes :

$$\forall f \in E, \|f\|_{\{\infty\}} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

$$\text{On pose } \|f\| = \|f\|_{\{\infty\}} + \|f\|_1$$

1) a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme et qu'elle est équivalente à $\|\cdot\|_{\{\infty\}}$

2) b) La norme $\|\cdot\|$ est-elle équivalente à $\|\cdot\|_{\{\infty\}}$? Justifier votre réponse.

Soit

$$\begin{aligned} L : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto L(f) = f(0) \end{aligned}$$

a) Montrer que L est continue sur $(E, \|\cdot\|)$.

b) Prouver que $\|L\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |L(f)|$ existe puis déterminer sa valeur.

c) Soit (f_n) la suite de fonctions définies par : $\forall t \in [0, 1], f_n(t) = (1 - t)^n$. Evaluer $\|f_n\|_1$ et déduire que L n'est pas continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$.

3) On considère $A = \{f \in E \text{ tel que } f(0) \geq 0\}$

a) Montrer que $L(A) = [0, +\infty[$.

b) En déduire que A est une partie fermée de $(E, \|\cdot\|)$ mais n'est pas compact.

Exercice 15 On pose $l^2(\mathbb{R}) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ suite réelle telle que la série } \sum_{n \geq 0} (u_n)^2$

1) a) Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux éléments de $l^2(\mathbb{R})$, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ est absolument convergente.

b) Montrer que $l^2(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : l^2(\mathbb{R}) \times l^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \end{aligned}$$

est un produit scalaire $l^2(\mathbb{R})$.

3) Dédurre que l'application :

$$N_2 : l^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $l^2(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on considère $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément non nul de $l^2(\mathbb{R})$ et on pose

$$f : (l^2(\mathbb{R}), \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto f((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$$

4) a) Justifier que f est linéaire.

b) Montrer que $|f((u_n))| \leq k N_2(u_n)$, ou k est une constante à déterminer

c) Dédurre que f est lipchitzienne, puis que f est continue.

5) On pose $A = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{R}) \text{ telle que } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n \geq 0\}$.

Montrer que $\bar{A} = A$.