

Série I : Espace vectoriel normé

Exercice 1 Soit E l'espace vectoriel des suites bornées $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$.

On pose $N_\infty(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ et $N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.

Montrer que N_∞ et N sont des normes sur E et qu'elles ne sont pas équivalentes.

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt.$$

1. Montrer que N_a est une norme sur E .
2. Montrer pour tout $a, b \in [0, 1]$, les normes N_a et N_b sont équivalentes.
3. Montrer pour tout $a \in [0, 1]$ et $b \in]1, \infty[$ les normes N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
4. On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $P_n(X) = \frac{X^n}{2^n}$.
a) Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme constant 1 pour la norme N_2 et vers polynôme nul pour la norme N_a avec $|a| < 2$.

Exercice 3 Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ contenant 0 et

$$H(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}, C^1 \text{ tel que } f^2 \text{ et } f'^2 \text{ sont intégrables sur } I\}$$

1. Montrer que si f et g sont dans $H(I)$, alors fg et $f'g'$ sont intégrables sur I .
2. Montrer que $H(I)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

3. Montrer que l'application $\|\cdot\|_H$ définie par :

$$\forall f \in H(I), \|f\|_H = \left(\int_I f^2(t) dt + \int_I f'^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H(I)$.

4. On pose $L_2(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue; } f^2 \text{ est intégrable sur } I\}$
5. Vérifier que $L_2(I)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et que l'application $\|\cdot\|_2$ définie par :

$$\forall f \in L_2(I), \|f\|_2 = \left(\int_I f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

6. On pose

$$K(I) = \{f \in H(I), f(0) = 0\}.$$

Pour tout $x \in I$, on pose $\varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t) dt$ avec $c > 0$.

a) On pose $g = \varphi(f)$. Vérifier $g' + cg = f$ et montrer que si $f \in L_2(I)$, alors $\varphi(f) \in K(I)$.

b) Démontrer que qu'il existe $A > 0$ tel que

$$\|\varphi(f)\|_H \leq \|f\|_2, \forall f \in L_2(I).$$

Montrer que $\varphi : (L_2(I), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (K(I), \|\cdot\|_H)$ est continue.

Exercice 4 "Norme matricielle"

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$.

1. Pour une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ montrer qu'il existe une constante réelle C_A telle que $\|AX\| \leq C_A \|X\|, \forall X \in \mathbb{C}^n$.

2. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $N(A) = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$.
3. Vérifier que N est bien définie et que c'est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.
4. Montrer que N est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$ c à d

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}) \quad N(AB) \leq N(A)N(B).$$

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \text{ tel que } \lambda \text{ est une valeur propre de } A\}$$

5. Montrer que $\rho(A) \leq N(A)$.
6. Montrer que si $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$, alors $\rho(A) < 1$.

On admet dans la suite que si $\rho(A) < 1$, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$.

7. a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\rho(A) \leq [N(A^k)]^{\frac{1}{k}}$.
- b) Vérifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\rho(\lambda A) = |\lambda|\rho(A)$.
- c) Soit $\varepsilon > 0$, on pose $A_\varepsilon = \frac{A}{\varepsilon + \rho(A)}$.
Vérifier que $\rho(A_\varepsilon) < 1$ et en déduire l'existence d'un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0$, $N(A^k) \leq (\varepsilon + \rho(A))^k$.
- d) En déduire que $\lim_{k \rightarrow +\infty} N(A^k)^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

Exercice 5 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un IK -espace vectoriel normé et F un sous espace vectoriel de E .

1. Montrer que $\overline{F}$ est un sous espace vectoriel de E .
2. On suppose dans cette question que $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$.
a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \subset F$.
b) Déduire $F = E$.
3. Soit H un hyperplan de E . Démontrer que H est ou bien fermé ou bien dense dans E .
4. Soit A une partie de E . Démontrer que $\text{vect}(\overline{A}) \subset \overline{\text{vect}(A)}$.

Exercice 6 "Distance d'un point à une partie".

Soit A une partie non vide d'un e.v.n $(E, \|\cdot\|)$ et $x \in E$.

On rappelle que la distance entre x et A est

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\|, a \in A\}.$$

1. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
2. Montrer que si A est un fermé et E est de dimension finie, alors il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - a\|$.
3. Montrer que $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.
4. On considère l'application $d : A \rightarrow d_A : x \mapsto d(x, A)$ définie sur l'ensemble des parties fermées non vide de E .
Montrer que d est injective.

5. Montrer que l'application $d_A : x \mapsto d(x, A)$ est continue sur E .

6. On considère dans cette question $E = (C[0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continue de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On pose $A = \{f \in E; f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1\}$.

Déterminer $d(\tilde{0}, A)$.

(Ind : considérer la suite (f_n) définie par :
$$\begin{cases} f_n(t) = (n+1)t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(t) = 1 + \frac{1}{n} & \text{si } t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Exercice 7 "Diamètre".

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un IK -espace vectoriel normé. Pour A une partie non vide et bornée de E , on définit le diamètre de A par

$$\text{diam}(A) = \sup\{\|x - y\|, x \in A, y \in A\}.$$

1. Montrer que $\overline{A}$ et $F_r(A)$ sont également bornés.
2. On suppose que $\overset{\circ}{A}$ est non vide.
i) Vérifier que $\text{diam}(\overset{\circ}{A}) \leq \text{diam}(A)$. A t-on l'égalité
ii) Montrer que $\text{diam}(\overline{A}) = \text{diam}(A)$.

3. a) Montrer que $\text{diam}(F_r(A)) \leq \text{diam}(A)$.

b) Soit $x \in A$ et $u \in E$ avec $u \neq 0_E$. on pose

$$B = \{t \geq 0, x + tu \in A\}.$$

Montrer que $\text{Sup}(B)$ existe.

c) En déduire que toute demi droite issu d'un point x de A coupe $F_r(A)$.

(Ind : considérer $x + t_0 u$ avec $t_0 = \text{Sup}(B)$).