

Série III: Espace vectoriel normé

Exercice 12 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in M_p(\mathbb{R})$, on considère les applications

$$d_A : M_p(\mathbb{R}) \rightarrow M_p(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad g_A : M_p(\mathbb{R}) \rightarrow M_p(\mathbb{R})$$

$$N \mapsto NA \quad \quad \quad N \mapsto AN$$

1) Montrer que les applications d_A et g_A sont continues sur $M_p(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on considère une matrice $M \in M_p(\mathbb{R})$ fixée telle que la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée.

On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n M^k = \frac{1}{n+1} (I_p + M + \dots + M^n).$$

2) Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $M_p(\mathbb{R})$.

3) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $MU_n = U_nM = U_n \cdot \frac{1}{n+1} (M^{n+1} - I_p)$.

4) Soit L une valeur d'adhérence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) Montrer que $ML = LM = L$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_nL = LU_n = L$.

5) Soit L_1 et L_2 deux valeurs d'adhérence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que $L_1 = L_2$.

6) Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 13 1. Justifier que l'application $\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est continue.

2. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert.

3. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

4. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est non borné.

5. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

6. Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$.

Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ où χ représente le polynôme caractéristique.

(Ind : Utiliser la densité de $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$).

On pose $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}); \det(A) = 1\}$.

7. Montrer que $\overline{SL_n(\mathbb{K})} = SL_n(\mathbb{K})$ et que $SL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$.

8. a) Montrer que $SL_n(\mathbb{K})$ est non borné.

b) $SL_n(\mathbb{K})$ est-il compact ?

Exercice 14 On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); {}^tM.M = I_n\}$.

$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}); \det M = 1\}$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, On pose $N(A) = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe compact.

3. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

4. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas convexe.

5. Déduire que $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}); \det(A) = 1\}$ est un groupe compact.

6. Montrer qu'il existe une matrice $A_0 \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\sup_{M \in SO_n(\mathbb{R})} N(M) = N(A_0)$.

7. Montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

8. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On pose $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux.

Montrer que $O(E)$ est un groupe compact.

Exercice 15 .

On pose $D_n(IK) = \{A \in M_n(IK), \text{ tel que } A \text{ est diagonalisable}\}.$

1. a) Montrer que $D_n(IK)$ est étoilé par rapport à la matrice nulle.
b) Dédire que $D_n(IK)$ est connexe par arcs.
2. Montrer que $D_n(IK)$ n'est pas borné.
3. a) Justifier que l'application $M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C}) : M \mapsto \chi_M(M)$
est continue. (χ_M est le polynôme caractéristique de M)
b) Montrer que si D est une matrice diagonale, alors $\chi_D(D) = \tilde{0}$.
b) Dédire le théorème de Cayley Hamilton dans $M_n(\mathbb{C}) : \forall M \in M_n(\mathbb{C}), \chi_M(M) = \tilde{0}$.

Exercice 16 On considère $\|\cdot\|$ une norme sur $M_{n,1}(IK)$.

Pour $A \in M_n(IK)$, on pose

$$N(A) = \sup_{\|X\| \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}.$$

1. Montrer que N est une norme sur $M_n(IK)$.

2. Montrer que pour tout A et B dans $M_n(IK)$, $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

3. Soit $A \in M_n(IK)$, Justifier que $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ est bien défini.

4. Montrer que l'application $f : M_n(IK) \rightarrow M_n(IK)$
 $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue.

5. Montrer que si A est diagonalisable, alors e^A est aussi diagonalisable et semblable à la matrice $\text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})$.

6. Montrer si λ est une valeur propre de A et V un vecteur propre associé, alors $e^A V = e^{\lambda} V$.

Nedra