

Correction Série II E.N.V

Exercice 3

1) soit $f \in H \Leftrightarrow f^{(1)}, f^{(2)}$ et $f^{(3)}$ sont intégrés sur I
 $g \in H \Leftrightarrow g^{(1)}, g^{(2)}$ et $g^{(3)}$ " " "

D'où $t \mapsto f(t) \cdot g(t)$ est continue sur I
 $\forall t \in I; 0 \leq |f(t) \cdot g(t)| \leq \frac{1}{2} (f^{(2)}(t) + g^{(2)}(t))$
 $f^{(2)}$ et $g^{(2)}$ sont intégrés sur I , alors $f \cdot g$ est intégré sur I .

De m. f', g' sont intégrés sur I .

2) $H(I) \subset C^1(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions C^1 de $I \rightarrow \mathbb{R}$

• $\tilde{0} \in H(I)$

• $\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall f, g \in H$

$$(\lambda f + g)^{(2)} = \lambda f^{(2)} + g^{(2)} + 2\lambda f'g' \text{ intégrés sur } I$$

$$(\lambda f' + g')^{(2)} = \lambda f^{(3)} + g^{(3)} + 2\lambda f''g' \text{ " " } I.$$

$$\Rightarrow \lambda f + g \in H(I).$$

Ainsi $H(I)$ est un sous-espace de $C^1(I, \mathbb{R})$

3) soit $\varphi: H(I) \times H(I) \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f, g) \mapsto \int_I f(t)g(t)dt + \int_I f'(t)g'(t)dt$$

$\forall f, g \in H(I), f \cdot g$ et $f' \cdot g'$ est intégré sur I
 Alors φ est bien défini.

Il q φ est un produit scalaire sur I .

soit $f, g, h \in H(I); \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + h, g) &= \int_I (\lambda f + h)g dt + \int_I (\lambda f' + h')g' dt \\ &= \lambda \int_I f \cdot g dt + \int_I h \cdot g dt + \lambda \int_I f'g' dt + \int_I h'g' dt \\ &= \lambda \left(\int_I f \cdot g + \int_I f'g' \right) + \int_I h \cdot g + \int_I h'g' \\ &= \lambda \varphi(f, g) + \varphi(h, g) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi$ est linéaire / à 1^{re} variable.

$$\varphi(f, g) = \varphi(g, f)$$

$$\text{soit } f \in H(I); \varphi(f, f) = \int_I f^2 dt + \int_I f'^2 dt \geq 0$$

$$\begin{aligned} \varphi(f, f) = 0 &\Leftrightarrow \int_I f^2 dt + \int_I f'^2 dt = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_I f^2(t) dt = 0 \text{ et } \int_I f'^2(t) dt = 0 \end{aligned}$$

Comme f^2 est continue; positive et intégrée sur I

Alors $f^2(t) = 0, \forall t \in I \Leftrightarrow f = \tilde{0}$.

$\Rightarrow \varphi$ est un produit scalaire et par conséquent

L'app. $\|\cdot\|_H: f \mapsto \sqrt{\varphi(f, f)}$ est une norme sur $H(I)$

(1)

4) Même travail que 1-3.

$$\mathcal{K} = \{f \in H(I); f(0) = 0\}$$

a) soit $f \in L^2(I) \Rightarrow f$ est continue sur I

$\Rightarrow t \mapsto e^{ct} f(t)$ est continue sur I

$\Rightarrow t \mapsto \int_0^x e^{ct} f(t) dt$ est de classe C^1 sur I

Alors $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur I .

$g = \varphi(f)$ est de classe C^1 sur I et

$$\forall x \in I, g'(x) = -c g(x) + e^{cx} \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) + c g(x) = f(x).$$

b) On a $g'(x) + c g(x) = f(x), \forall x \in I$

$$g'(x) \cdot g(x) + c g^2(x) = f(x) \cdot g(x), \forall x \in I.$$

$\Rightarrow \forall x > 0:$

$$\int_0^x g'(t) g(t) dt + c \int_0^x g^2(t) dt = \int_0^x f(t) g(t) dt$$

$$\frac{1}{2} g^2(x) + c \int_0^x g^2(t) dt = \int_0^x f(t) g(t) dt.$$

c) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^x f(t) g(t) dt \leq \left(\int_0^x f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x g^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

(5)

$$\Rightarrow e \int_0^x g^2(t) dt \leq \left(\int_0^x f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x g^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow c \cdot \left(\int_0^x g^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^x f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

inégalité vraie pour
 $\int_0^x g^2(t) dt = 0$ ou
 $\neq 0$

$\Rightarrow x \mapsto \int_0^x g^2(t) dt$ est majorée $\Rightarrow$

$$\int_0^{+\infty} g^2(t) dt < +\infty \text{ et } \left(\int_0^{+\infty} g^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{c} \|f\|_2$$

$$\Rightarrow \varphi(f) \in L^2(I) \text{ et } \|\varphi(f)\|_2 \leq \frac{1}{c} \|f\|_2$$

b) $\varphi(f) = g$: vérifie $g' = f - c g$.

Comme $f \in L^2(I)$ et $g \in L^2(I)$, alors
 $g' \in L^2(I)$ et on a f continue $\Rightarrow \varphi(f) \in \mathcal{H}_{\text{sm}} I$

De plus $\varphi(f)(0) = 0 \Rightarrow \varphi(f) \in \mathcal{K}$.

$$\|\varphi(f)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\varphi(f)\|_2^2 + \|(\varphi(f))'\|_2^2$$

$$\leq \frac{1}{c^2} \|f\|_2^2 + \|f - c \varphi(f)\|_2^2$$

$$\leq \frac{1}{c^2} \|f\|_2^2 + (\|f\|_2 + c \|\varphi(f)\|_2)^2$$

$$\leq \frac{1}{c^2} \|f\|_2^2 + \left(\frac{1}{c} + c \right) \|f\|_2^2.$$

$$\leq \left(\frac{1}{c} e + \left(\frac{1}{c} + c \right) e \right)^2 \|f\|_2^2.$$

Ainsi $\|\varphi(f)\|_H \leq A \cdot \|f\|_2$

avec $A = \sqrt{\frac{1}{c^2} e + \left(\frac{1}{c} + c \right) e}.$

c) $\varphi: L^2(I) \longrightarrow (K(I), \|\cdot\|_H)$
 $f \longmapsto \varphi(f).$

ona $\forall f, g \in L^2(I); \forall \lambda \in K.$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + g)(x) &= e^{-cx} \int_0^x e^{ct} (\lambda f + g)(t) dt \\ &= \lambda e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t) dt + e^{-cx} \int_0^x e^{ct} g(t) dt \end{aligned}$$

$$= \lambda \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x)$$

$$= [\lambda \varphi(f) + \varphi(g)](x). \quad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow \varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$$

$\Rightarrow \varphi$ est linéaire

De plus $\|\varphi(f)\|_H \leq A \|f\|_2$

$\Rightarrow \varphi$ est continue.

Exercice 3

F un s.e.v. de $E.$

1) Montrer que $\overline{F}$ est un s.e.v. de $E.$

ona. $\overline{F} \subset E;$

$$0_E \in F \subset \overline{F}$$

Soient $x, y \in \overline{F}$ et $\lambda \in K$
 Alors $\exists (x_n)$ et (y_n) deux suites d'éléments de F tq. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y.$

un s.e.v. de E , alors $\lambda x_n + y_n \in F.$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda x_n + y_n) \in \overline{F}$

$$\Rightarrow \lambda x + y \in \overline{F}$$

Alors $\overline{F}$ est un s.e.v. de E

2) a) $\overline{F} \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in \overline{F} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tq
 $B(a, \varepsilon) \subset F.$

Soit $x \in B(0, \varepsilon) \Rightarrow \exists a \in B(a, \varepsilon) \subset F$

$$\Rightarrow x + a \in F.$$

Puisque F un s.e.v. de E et $a \in F.$

Alors. $x \in F. \Rightarrow B(0, \varepsilon) \subset F.$

b) Soit $y \in F \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\|y\|}$ vérifie.

$$\left\| \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{y}{\|y\|} \right\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow$$

③

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{y}{\|y\|} \in B(0, \varepsilon) \subset F$$

$\Rightarrow y \in F$ (F un s.e.v de E)

Ainsi $E \subset F \iff E = F$.

3) soit H un hyperplan de E.

Alors $\bar{H}$ est un s.e.v de E.

$$H \subset \bar{H} \subset E.$$

Supposons $H \neq \bar{H} \Rightarrow \exists \alpha \in \bar{H} \setminus H$

Puisque H est un hyperplan $\Rightarrow$

$$E = H \oplus \text{vect}(\alpha).$$

$$\begin{cases} \bullet \alpha \in \bar{H} \Rightarrow \text{vect}(\alpha) \subset \bar{H} \quad (\bar{H} \text{ s.e.v}) \\ \bullet H \subset \bar{H} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H \oplus \text{vect}(\alpha) \subset \bar{H} \Rightarrow E \subset \bar{H}$$

$$\Rightarrow \bar{H} = E \iff H \text{ est dense dans } E.$$

$$\text{c.f. } H = \bar{H} \text{ ou bien } \bar{H} = E.$$

4) $A \subset E$;

soit $x \in \text{vect}(\bar{A}) \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_p \in \bar{A}$
 $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$

$$\text{t.q. } x = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot x_i$$

comme $x_i \in \bar{A} \Rightarrow \exists (x_{in})$ suite de A
 t.q. $x_{in} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_i$

$$x_n = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_{in} \in \text{vect}(A)$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \in \overline{\text{vect}(A)}$$

$$\parallel \quad \Rightarrow x \in \overline{\text{vect}(A)}$$

D'où $\text{vect}(\bar{A}) \subset \overline{\text{vect}(A)}$.

Exercice 6

$$\emptyset \neq A \subset E, \quad x \in E.$$

$$\perp d(x, A) = 0 \iff \begin{matrix} \text{il existe} \\ \text{un min de } \{ \|x - a\|, a \in A \} \end{matrix}$$

$$\text{et } \exists (a_n) \text{ suite d'éléments de } A$$

$$\|a_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x.$$

$$\iff x \in \bar{A}.$$

a) A fermé de E.

$$\dim E < \infty.$$

$$d(x, A) = \inf \{ \|x - a\|, a \in A \}$$

$$\Rightarrow \forall a \in A; \|x - a\| \geq d(x, A)$$

$$\text{et } \exists (a_n) \subset A \text{ t.q. } \|x - a_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d(x, A)$$

La suite $(\|x - a_n\|)$ est une suite cv
 Alors elle est bornée.

$$\text{Comme } \|a_n\| \leq \|a_n - x\| + \|x\|$$

Alors la suite (a_n) est bornée.

Or $\dim E < \infty$; Alors d'après le th de Bolzano-Weierstrass

(4)

il existe $(a_{p(n)})$ s.suite de (a_n) tq

$$a_{p(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_0 \in \bar{A} = A.$$

$$\Rightarrow \|x - a_{p(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|x - a_0\|$$

Comme $d(x, A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - a_n\|$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - a_{p(n)}\| = d(x, A)$$

$$\Rightarrow d(x, A) = \|x - a_0\|; a_0 \in A.$$

3) On a $A \subset \bar{A}$

$$\Rightarrow \{ \|x - a\|; a \in A \} \subset \{ \|x - a\|; a \in \bar{A} \}$$

$$\Rightarrow d(x, A) \geq d(x, \bar{A}), \textcircled{1}$$

D'autre part:

On a. $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in \bar{A}$ tq $\|x - y\| \leq d(x, \bar{A}) + \varepsilon$

$$y \in \bar{A} \Rightarrow B(y, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists a \in A \text{ tq } \|y - a\| < \varepsilon.$$

$$\text{or } d(x, A) \leq \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$$

$$\leq d(x, \bar{A}) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow d(x, A) \leq d(x, \bar{A}) \textcircled{2}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{1} + \textcircled{2}} d(x, A) = d(x, \bar{A}).$$

$$4) d: A \longrightarrow d_A: x \longmapsto d(x, A).$$

soit A, B deux parties fermées et non vides de E . tq $d(A) = d(B)$

$$\Leftrightarrow d_A = d_B \Leftrightarrow d(x, A) = d(x, B)$$

$$\forall x \in E$$

$$\text{Si } x \in A \Rightarrow d(x, A) = 0 \Rightarrow d(x, B) = 0$$

$$\Rightarrow x \in B = B$$

$$\Rightarrow A \subset B$$

Puisque A et B jouent des rôles symétriques

$$\text{On aura } B \subset A. \Rightarrow A = B.$$

5) Pq. $d_A: E \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue

$$x \longmapsto d_A(x) = d(x, A)$$

soit $x, y \in E; \forall a \in A$.

$$d(x, A) \leq \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|.$$

$$\Rightarrow \|y - a\| \geq d(x, A) - \|x - y\|; \forall a \in A$$

$$\Rightarrow d(y, A) \geq d(x, A) - \|x - y\|.$$

$$\Rightarrow d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\| \textcircled{1}$$

Par symétrie des rôles de x et y , on a.

$$d(y, A) - d(x, A) \leq \|x - y\| \textcircled{2}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{1} + \textcircled{2}} |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$$

$$\Rightarrow d_A \text{ est 1-lipschitzienne.}$$

$$\Rightarrow d_A \text{ est continue sur } E.$$

1) $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.
 on a $1 \leq \int_0^1 f(t) dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty$
 $\forall f \in A$

$$\Rightarrow d(\bar{0}, A) \geq 1.$$

$$f_n: t \mapsto f_n(t) = \begin{cases} (n+1)t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{si } t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

$$f_n(0) = 0$$

f_n est continue sur $[0,1]$

$$\int_0^1 f_n(t) dt = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \geq 1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n \in A.$$

$$\Rightarrow 1 \leq d(\bar{0}, A) \leq \|f_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\text{Ainsi } d(\bar{0}, A) = 1$$

Exercice 7

$\emptyset \neq A \subseteq E$; A bornée.

1) A est bornée $\Rightarrow \exists M \geq 0$ tq $\|x\| \leq M, \forall x \in A$

$\forall x \in \bar{A}; \exists (x_n) \subset A$ tq $x_n \rightarrow x$

or $\|x_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

$n \rightarrow +\infty$, on obtient:

$$\|x\| \leq M, \forall x \in \bar{A}.$$

$\Rightarrow \bar{A}$ est bornée.

D'autre part on a. $F(A) \subset \bar{A} \Rightarrow F_r(A)$ est bornée.

⑥

$$2) \bar{A} \neq \emptyset.$$

$$\bar{A} \subset A \subset \bar{A}.$$

$$\Rightarrow \{ \|x-y\|, x \in \bar{A}, y \in \bar{A} \} \subset \{ \|x-y\|, x \in A, y \in A \}$$

$$\Rightarrow \text{diam}(\bar{A}) \leq \text{diam}(A) \leq \text{diam}(\bar{A})$$

i) D'une manière générale on n'a pas $\text{diam}(\bar{A}) = \text{diam}(A)$.

Par exemple pour $A = [1,2] \cup \{3\}$.

$$\bar{A} = [1,2] \Rightarrow \text{diam}(\bar{A}) = 1$$

$$\text{or } \text{diam}(A) = 2.$$

$$\text{ii) Mg } \text{diam}(A) = \text{diam}(\bar{A})$$

$$\text{on a } \text{diam}(A) \leq \text{diam}(\bar{A}).$$

soient $x, y \in \bar{A}$, alors pour $\varepsilon > 0, \exists x' \in A, \exists y' \in A$

$$\text{tq } \|x-x'\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \|y-y'\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\Rightarrow \|x-y\| \leq \|x-x'\| + \|x'-y'\| + \|y'-y\| \leq \|x'-y'\| + \varepsilon.$$

$$\forall x, y \in \bar{A}; \|x-y\| \leq \text{diam}(A) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup \{ \|x-y\|, x \in \bar{A}, y \in \bar{A} \} \leq \text{diam}(A)$$

$$\Rightarrow \text{diam}(\bar{A}) \leq \text{diam}(A) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \text{diam}(\bar{A}) \leq \text{diam}(A)$$

$$\text{Ainsi } \text{diam}(A) = \text{diam}(\bar{A})$$

3) a) On a $\text{Fr}(A) \subset \bar{A}$
 $\Rightarrow \text{diam}(\text{Fr}(A)) \leq \text{diam}(\bar{A}) = \text{diam}(A)$

b) $x \in A; u \in E; u \neq 0_E$

$B = \{t \geq 0; x + tu \in A\}$

$0 \in B$ car $x \in A \Rightarrow B \neq \emptyset$.

On a A est bornée $\Leftrightarrow \exists M \geq 0$ $\forall x \in A, \|x\| \leq M$

$\Rightarrow \forall t \in B; \|x + tu\| \leq M$

$\Rightarrow \|tu\| = \|x + tu\| - \|x\| \leq M$

$\Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{M + \|x\|}{\|u\|}; \forall t \in B$

Alors B est majorée.

$B \neq \emptyset$ et majorée $\Rightarrow \sup B$ existe.

c) Une demi-droite issue d'un point $x \in A$ passe par un point $u \in E$, alors elle de la forme $D = \{x + tu; t \geq 0\}$ (on suppose $\|u\| = 1$)

D'après b) $\sup B$ existe.

On pose $t_0 = \sup B \Rightarrow x + t_0 u \in D$.

Il y a $x + t_0 u \in \text{Fr}(A)$

On a $t_0 = \sup B \Rightarrow \exists (t_n)$ suite d'éléments de B $t_n \rightarrow t_0$.

Puisque $t_n \in B \Rightarrow x + t_n u \in A$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x + t_n u = x + t_0 u \in \bar{A}$.

Il y a $x + t_0 u \notin A^\circ$.

Supposons $x + t_0 u \in A^\circ \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$

$B(x + t_0 u, \varepsilon) \subset A$.

Or $x + (t_0 + \varepsilon_0)u \in B(x + t_0 u, \varepsilon)$

$\Rightarrow x + (t_0 + \varepsilon_0)u \in A$

$\Rightarrow t_0 + \varepsilon_0 \in B$

unip car $t_0 = \sup B$

Exercice 1

1) $N(U) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |U_{n+1} - U_n|$

- soit $(U) \in E$; lg $N(U) = 0 \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow U_{n+1} = U_n, \forall n \in \mathbb{N}$

or $U_0 = 0 \Rightarrow U_n = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow U = \tilde{0}$

- soit $\lambda \in \mathbb{R}$; $U \in E$; $N(\lambda U) = |\lambda| N(U)$

- soit $U, V \in E$;

$N(U+V) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |U_{n+1} + V_{n+1} - (U_n + V_n)|$

$\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |U_{n+1} - U_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |V_{n+1} - V_n|$

$\leq N(U) + N(V)$

N est une norme sur E .

* De m N est une norme sur E .

2) Pq N et N_m ne sont pas équivalentes.

On considère la suite $(U^P)_{P \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par:

$\forall P \in \mathbb{N}$:

$U_n^P = \begin{cases} P & \text{si } n \leq P \\ 0 & \text{si } n > P \end{cases}$

$\forall P \in \mathbb{N}$; $U_0^P = 0, |U_n^P| \leq P, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (U_n^P)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée

$\Rightarrow (U_n^P)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

$N_m(U^P) = P$

$N(U^P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |U_{n+1}^P - U_n^P|$

$\Rightarrow \frac{N_m(U^P)}{N(U^P)} = \frac{P}{P} \xrightarrow{P \rightarrow +\infty} 1$

$\Rightarrow N_m \neq N$.

Exercice 2

$N_a(P) = |P(\alpha)| + \int_0^1 |P'(t)| dt$

soit $P \in \mathbb{R}[X]$ lg $N_a(P) = 0 \Leftrightarrow$

$|P(\alpha)| + \int_0^1 |P'(t)| dt = 0$

$\Rightarrow P(\alpha) = 0$ et $\int_0^1 |P'(t)| dt = 0$

or $|P'|$ est continue et positive

d'où $P'(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$

P' poly qui admet une infinité de racines

$\Rightarrow P' = \tilde{0} \Leftrightarrow P'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow P = cte$ sur $\mathbb{R}$.

or $P(\alpha) = 0 \Rightarrow P = \tilde{0}$ sur $\mathbb{R}$.

$N_a(\lambda P) = |\lambda| N_a(P), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ facile à vérifier

$N_a(P+Q) \leq N_a(P) + N_a(Q)$

$\Rightarrow N_a$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. (On suppose que $a \leq b$)
 $a, b \in [0, 1]$.

on a $\int_a^b p'(t) dt = P(b) - P(a)$

$\Leftrightarrow P(b) = P(a) + \int_a^b p'(t) dt$

$\Rightarrow |P(b)| \leq |P(a)| + \int_a^b |p'(t)| dt$
 $\leq |P(a)| + \int_0^1 |p'(t)| dt$

$\Rightarrow |P(b)| + \int_0^1 |p'(t)| dt \leq |P(a)| + 2 \int_0^1 |p'(t)| dt$

$N_b(P) \leq 2 \cdot N_a(P)$

De m $N_a(P) \leq 2 N_b(P)$

Ainsi $\frac{1}{2} N_a(P) \leq N_b(P) \leq 2 N_a(P)$

$\Rightarrow N_a \sim N_b$

b) soit $P_n = x^n$ suite d'éléments de $\mathbb{R}[X]$

$N_a(P_n) = a^n + \int_0^1 n x^{n-1} dt$

$= a^n + 1$

$N_b(P_n) = b^n + 1 \Rightarrow \frac{N_a(P_n)}{N_b(P_n)} = \frac{a^n + 1}{b^n + 1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{a^n}{b^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$

$\Rightarrow \frac{N_b(P_n)}{N_a(P_n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$

$\Rightarrow N_b \sim N_a$

Exercice 4

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} ; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leadsto \|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

1) soit $Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \Rightarrow |y_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j|$
 $\leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \|X\|_\infty$

$\Rightarrow \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \|X\|_\infty$

$\Rightarrow \|AX\|_\infty \leq 2 \|X\|_\infty$

or $\mathbb{C}^n$ est un e.v. de dimension finie

$\Rightarrow \|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes $\Rightarrow$

$\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0$ tq

$\beta \|x\| \leq \|x\|_\infty \leq \alpha \|x\|, \forall x \in \mathbb{C}^n$

$\Rightarrow \|AX\| \leq \frac{1}{\beta} \|AX\|_\infty \leq \frac{\alpha}{\beta} \|x\|_\infty \leq \frac{\alpha \cdot \alpha}{\beta} \|x\|$

$\Rightarrow \exists C_A = \frac{\alpha^2}{\beta}$ tq

$\|AX\| \leq C_A \cdot \|x\|, \forall x \in \mathbb{C}^n$

d'après 1)

$\frac{\|AX\|}{\|x\|} \leq C_A, \forall x \neq 0 \in \mathbb{C}^n$

$\Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|x\|}$

existe

9

$\Leftrightarrow N$ est bien définie

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ tq $N(A) = 0$

$$\Leftrightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \Leftrightarrow \|Ax\| = 0, \forall x$$

ou $\| \cdot \|$ est norme, d'où $Ax = 0; \forall x \in \mathbb{C}^n$

$$\Leftrightarrow \ker A = \mathbb{C}^n$$

$$\Leftrightarrow A = 0_n$$

• Soit $\lambda \in \mathbb{C}; N(\lambda A) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|}{\|x\|}$
 $= |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| N(A)$

• Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

$$\forall x \neq 0; \|(A+B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

$$\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

$$\leq N(A) + N(B)$$

$$\Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq N(A) + N(B)$$

$$\Leftrightarrow N(A+B) \leq N(A) + N(B)$$

CL N est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$

4) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}); N(AB) \leq N(A) \cdot N(B)$

ona. $\forall x \neq 0; \|ABx\| \leq N(A) \cdot \|Bx\|$
 $\leq N(A) \cdot N(B) \cdot \|x\|$

$$\Rightarrow \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq N(A) \cdot N(B), \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq N(A) \cdot N(B)$$

$$\Rightarrow N(AB) \leq N(A) \cdot N(B)$$

5) Soit $\lambda \forall p$ de $A \Rightarrow \exists x \neq 0$ tq $Ax = \lambda x$

$$\Rightarrow Ax^t x = \lambda x^t x$$

$$\Rightarrow N(Ax^t x) = |\lambda| N(x^t x)$$

$$\text{ou } N(A \cdot x^t x) \leq N(A) \cdot N(x^t x)$$

$$\Rightarrow |\lambda| \cdot N(x^t x) \leq N(A) \cdot N(x^t x)$$

Comme $x \neq 0$, alors la matrice $x^t x \neq 0_n$

$$\exists x_0 \neq 0 \quad \text{car } (x^t x)_{ii} = x_{i0}^2 \neq 0$$

D'où $N(x^t x) \neq 0$ et par suite

$$\Rightarrow \max\{|\lambda|; \lambda \text{ vp de } A\} \leq N(A)$$

6) On a $\rho(A) \leq N(A)$

$$\Rightarrow \rho(A^k) \leq N(A^k), \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\text{ou } \lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} N(A^k) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho(A^k) = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\rho(A))^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$$

7) On a $\rho(A) \leq N(A)$

$$(\rho(A))^k \leq N(A^k) \Rightarrow \rho(A) \leq [N(A^k)]^{1/k}$$

b) si $\alpha = 0$, le résultat est vrai.
 si $\alpha \neq 0$: $\lambda \forall p \text{ de } A \Leftrightarrow \alpha A \forall p \text{ de } \alpha \cdot A$.

$$\Rightarrow p(\alpha A) = |\alpha| p(A)$$

c) Soit $\varepsilon > 0$; $A_\varepsilon = \frac{A}{\varepsilon + p(A)}$.

$$p(A_\varepsilon) = p\left(\frac{A}{\varepsilon + p(A)}\right) = \frac{p(A)}{\varepsilon + p(A)} < 1$$

$$\text{D'où } \lim_{k \rightarrow +\infty} A_\varepsilon^k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} N(A_\varepsilon^k) = 0$$

$$\Rightarrow \dots, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall k \geq k_0, N(A_\varepsilon^k) \leq 1$$

$$\Rightarrow \dots, N\left(\frac{A^k}{(\varepsilon + p(A))^k}\right) \leq 1$$

$$N(A^k) \leq (\varepsilon + p(A))^k$$

d) On déduit que.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall k \geq k_0, \left(N(A^k)\right)^{\frac{1}{k}} \leq \varepsilon + p(A)$$

$$\text{De plus } p(A) \leq \left(N(A^k)\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall k \geq k_0, \left| \left(N(A^k)\right)^{\frac{1}{k}} - p(A) \right| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(N(A^k)\right)^{\frac{1}{k}} = p(A).$$