

Exercice 1

$$1) E = C^1([0,1], \mathbb{R})$$

$$a) \forall f \in E: n(f) = \left[f(0)^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{On pose } \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \longmapsto \langle f, g \rangle =$$

$$f(0) \cdot g(0) + \int_0^1 f'(t) g'(t) dt$$

Soient $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda f + h, g \rangle = (\lambda f(0) + h(0)) g(0)$$

$$+ \int_0^1 (\lambda f' + h') g' dt$$

$$= \lambda (f(0) + \int_0^1 f' g' dt) + h(0) g(0) + \int_0^1 h' g' dt$$

$$= \lambda \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle$$

$\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire. α = variable

Soient $f, g \in E$

$$\langle g, f \rangle = g(0) f(0) + \int_0^1 g'(t) f'(t) dt$$

$$= \langle f, g \rangle$$

$\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

Soit $f \in E$.

$$\langle f, f \rangle = (f(0))^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt \geq 0$$

Série II e.d.n.

$$Si \langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow (f(0))^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0$$

or $f \in C^1 \Rightarrow f'$ est continue sur $[0,1]$

$\Rightarrow (f')^2$ est continue, positive.

$$\Rightarrow f'(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow f = ct \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{or } f(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f = \tilde{0}$$

$\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

et posons $n : f \mapsto n(f) = \sqrt{\langle f, f \rangle}$

est une norme sur E .

$$b) F = \{ f \in E \text{ tq } f(0) = 0 \}$$

$$n_1(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) + f'(t)| = \|f + f'\|_\infty$$

Soit $f \in F$ tq $n_1(f) = 0 \Leftrightarrow$

$$\|f + f'\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f + f' = \tilde{0}, \text{ alors}$$

f vérifie l'équation différentielle $y' + y = 0$

alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $f(t) = \lambda e^{-t}$

Puisque $f(0) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow f(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1]$

$$\Rightarrow f = \tilde{0}$$

• Soit $f \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$N_1(\lambda f) = \|\lambda f + f'\|_\infty = |\lambda| \|f + f'\|_\infty = |\lambda| N_1(f)$$

• Soient $f, g \in E$.

$$N_1(f+g) = \|f+g + f'+g'\|_\infty \leq \|f+f'\|_\infty + \|g+g'\|_\infty = N_1(f) + N_1(g)$$

Ainsi N_1 est une norme sur F

2) $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$.

$$N_2(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx$$

Soit $f \in E$ tel que $N_2(f) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 e^x |f(x)| dx = 0$.

Comme $x \mapsto e^x |f(x)|$ est continue et positive sur $[0,1]$, alors

$\forall x \in [0,1]: e^x |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow f = 0$

• Il est facile de vérifier.

$$N_2(\lambda f) = |\lambda| N_2(f) \quad \forall f, g \in E$$

$$N_2(f+g) \leq N_2(f) + N_2(g);$$

$\Rightarrow N_2$ est une norme sur E .

2) Soit $f_n(x) = \begin{cases} 1-nx & n \cdot x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & n \cdot x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$

$$N_1(f_n) = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, \frac{1}{n}]} |f_n(x)| = f_n(\cdot) = 1 \quad (f_n \text{ est } 1 \text{ sur } [0, \frac{1}{n}])$$

$$\Rightarrow N_1(f_n) = 1$$

$$N_2(f_n) = \int_0^1 e^x |f_n(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{n}} e^x (1-nx) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx) e^x dx = \left[(1-nx) e^x \right]_0^{\frac{1}{n}} + n \int_0^{\frac{1}{n}} e^x dx$$

$$N_2(f_n) = -1 + n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_2(f_n)}{N_1(f_n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) - 1 = 0 \quad (e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n})$$

$$\text{Alors } \frac{N_1(f_n)}{N_2(f_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$\Rightarrow \frac{N_1}{N_2}$ n'est pas bornée $\Rightarrow N_1 \neq N_2$

exercice 10

$$N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

i) Π_q N est une norme sur $\Pi_n(\mathbb{C})$

ii) soit $A \in \Pi_n(\mathbb{C})$ tq $N(A) = 0$

$$\Leftrightarrow \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n; \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 0 \Leftrightarrow \forall i, j, |a_{ij}| = 0 \Leftrightarrow \forall i, j, a_{ij} = 0$$

$$\Leftrightarrow A = \tilde{0}$$

iii) soient $A \in \Pi_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

$$N(\lambda A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\lambda a_{ij}| = |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$|N(\lambda A)| = |\lambda| N(A)$$

iv) soient $A, B \in \Pi_n(\mathbb{C})$

$$N(A+B) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij} + b_{ij}|$$

$$\text{Or } \forall 1 \leq i \leq n; \sum_{j=1}^n |a_{ij} + b_{ij}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leq N(A) + N(B)$$

$$\Rightarrow N(A+B) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij} + b_{ij}| \leq N(A) + N(B)$$

$$2) N(AB) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |c_{ij}|$$

$$\text{avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$\text{or } |c_{ij}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}|$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n |c_{ij}| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}|$$

$$\leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \sum_{j=1}^n |b_{kj}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \cdot \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{kj}| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n |a_{ik}|}_{N(A)} N(B)$$

$$\Rightarrow \max_{1 \leq i \leq n} |c_{ij}| \leq N(A) \cdot N(B)$$

$$\Leftrightarrow N(A \cdot B) \leq N(A) \cdot N(B)$$

3) a) soit λ v.p de $A \Leftrightarrow \exists x \in \Pi_n(\mathbb{C})$ tq

$$x \neq \tilde{0} \text{ et } Ax = \lambda x$$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*; A^k x = \lambda^k x$$

$$\Rightarrow A^k \underbrace{x^t x}_{\in \Pi_n(\mathbb{R})} = \lambda^k x^t x$$

$$\Rightarrow N(A^k \cdot x^t x) = |\lambda^k| N(x^t x)$$

$$\text{or } N(A^k \cdot x^t x) \leq N(A^k) \cdot N(x^t x)$$

$$\Rightarrow |\lambda^k| N(x^t x) \leq N(A^k) N(x^t x)$$

$$\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \exists x_0 \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$X^t X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (x_1 \dots x_n) = \begin{pmatrix} x_{ij} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (X^t X)_{i_0 i_0} = x_{i_0}^2 \neq 0 \Rightarrow X^t X \neq 0$$

$$\Rightarrow N(X^t X) \neq 0$$

On en déduit $| \lambda^k | \leq N(A^k)$.

b) " $\Leftarrow$ " Si $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0 \Rightarrow N(A^k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$

Comme $| \lambda^k | \leq N(A^k)$, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} | \lambda |^k = 0$

$$\Rightarrow | \lambda | < 1, \quad \forall \lambda \in \text{Sp de } A$$

Ainsi $\rho(A) < 1$

" $\Rightarrow$ ". Si $\rho(A) < 1 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \text{Sp de } A, \text{ on } | \lambda | < 1$

Comme A est diagonalisable, alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$

tg $A = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$ ($\lambda_i \in \text{Sp de } A$)

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}; A^k = P \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k) P^{-1}$$

$$\Rightarrow N(A^k) \leq N(P) \cdot N(\text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)) \cdot N(P^{-1})$$

Or $N(\text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)) = \max_{1 \leq i \leq n} | \lambda_i^k |^k$

Or $| \lambda_i | < 1; \quad \forall 1 \leq i \leq n$

$$\Rightarrow | \lambda_i |^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow N(\text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow N(A^k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \Leftrightarrow A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

4) $\varphi_B: \Pi_n(\mathbb{C}) \rightarrow \Pi_n(\mathbb{C})$

$$A \mapsto AB$$

a) φ_B est linéaire $\Rightarrow \varphi_B$ est continue.
 $\dim \Pi_n(\mathbb{C}) < \infty$

b) $F = \{ A \in \Pi_n(\mathbb{C}) \mid AB = 0 \}$

$$= \{ A \in \Pi_n(\mathbb{C}) \mid \varphi_B(A) = 0 \}$$

$$= \ker \varphi_B = \varphi_B^{-1}(\{0\})$$

$\{0\}$ est un fermé. $\Rightarrow \varphi_B^{-1}(\{0\}) = F$ est un fermé

φ_B est continue

Alors $F = \overline{F}$

* Pg. $F^0 = \emptyset$. $F^0 \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists A \in F^0$

Supposons que $F^0 \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \exists r > 0 \text{ tg } B(A, r) \subset F$$

On considère la matrice $C = A + \frac{r}{2} I_n$

$C \in B(A, r)$ car $\|C - A\| = \|\frac{r}{2} I_n\| = \frac{r}{2} < r$

D'autre part: $C \cdot B = \underbrace{B \cdot A}_{=0} + \frac{r}{2} B = \frac{r}{2} B \neq 0$

$$\Rightarrow C \notin F$$

Ce qui contredit le fait que $B(A, r) \subset F$

Ainsi $F^0 = \emptyset$

$\subseteq G = \{ A = (a_{ij}) \in \Pi_n(\mathbb{C}) \mid |a_{ij}| \leq 1 \}$

Si $A \in G$, alors $N(A) \leq n$

$\Rightarrow G$ est bornée

fig. ext

$\text{fig} : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$
 $A \mapsto a_{ij}$
 fig est linéaire sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie. alors fig est continue
 $\Rightarrow \text{fig}^*$ est continue sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

Alors $|a_{ij}| \leq 1 \Leftrightarrow \text{fig}^*(A) \in B_{\mathbb{F}}(0,1)$
 $\Leftrightarrow A \in \text{fig}^{-1}(B_{\mathbb{F}}(0,1))$

Ce qui montre que

$G = \{ A | a_{ij} \in B_{\mathbb{F}}(0,1) \forall i,j \leq n \}$
 $A \in \text{fig}^{-1}(B_{\mathbb{F}}(0,1))$

$G = \bigcap_{1 \leq i,j \leq n} \text{fig}^{-1}(B_{\mathbb{F}}(0,1))$

Comme fig est continue et $B_{\mathbb{F}}(0,1)$ est un fermé, alors $\text{fig}^{-1}(B_{\mathbb{F}}(0,1))$ est un fermé, d'où G c'est une intersection finie de fermé et par suite G est un fermé. ①

D'autre part $\forall A \in G$, on a $|a_{ij}| \leq 1$
 $\Rightarrow \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq n \Rightarrow \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq n$

$\Rightarrow N(A) \leq n, \forall A \in G$
 $\Rightarrow G$ est une partie bornée

$G \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie
 G est un fermé et bornée.

Alors G est un compact

(ii) On considère l'application

$g : G \rightarrow \mathbb{R}$
 $A \mapsto g(A) = N(\varphi_B(A) - A)$
 $= N_0(\varphi_B - \text{id}_G)(A)$

L'application norme est une app Lipschitzienne, alors elle est continue. L'app φ_B et id_G sont continue. D'où l'app $g = N_0(\varphi_B - \text{id}_G)$ est continue sur $G = \text{compact}$, alors g est bornée et atteint ses bornes $\Rightarrow$ la borne sup est atteinte et c'est un max.

$\Rightarrow \exists A_0 \in G$ tq $\max_{A \in G} N(\varphi_B(A) - A) =$

$N(\varphi_B(A_0) - A_0)$
 soit $D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tq $N(D) < 1$
 $\exists S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tq $SD = I_n + S$
 $\Leftrightarrow S(D - I_n) = I_n$

⑤

Puisque $N(D) < 1$, alors la série $\sum_{n \geq 0} D^n$ converge.

Carr $N(D^n) \leq (N(D))^n$
et la série $\sum_{n \geq 0} (N(D))^n$ cv.

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} D^n$ est abs cv $\Rightarrow$ cv

On remarque que.

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} D^n \right) (D - I_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} D^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} D^n = I_n$$

$$(D - I_n) \sum_{n=0}^{+\infty} D^n = I_n$$

D'où $(D - I_n)$ est inversible etc.

$$(D - I_n)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} D^n$$

Exercice 3

On rappelle qu'une partie A d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ est convexe. si.

$\forall (x, y) \in A^2; [x, y] = \{dx + (1-x)y; 0 \leq x \leq 1\} \subset A$

1) $\forall a \in E; \forall r > 0; B(a, r)$ est convexe.

Soit $x \in B(a, r) \Leftrightarrow \|x - a\| < r$
 $y \in B(a, r) \Leftrightarrow \|y - a\| < r$

Soit $z \in [x, y] \Leftrightarrow \exists d \in [0, 1], z = dx + (1-d)y$

$$\begin{aligned} \|z - a\| &= \|dx + (1-d)y - a\| \\ &= \|d(x-a) + (1-d)(y-a)\| \\ &\leq d\|x-a\| + (1-d)\|y-a\| \\ &\leq dr + (1-d)r = r. \end{aligned}$$

$\Rightarrow z \in B(a, r)$

Ce qui montre que $[x, y] \subset B(a, r)$
 $\Rightarrow B(a, r)$ est convexe.

2) Soit $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (x_n) \subset A$ tq $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$
 $y \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (y_n) \subset A$ tq $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$

Soit $z = dx + (1-d)y \in [x, y]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exists z_n = d x_n + (1-d) y_n &\in [x_n, y_n] \subset A \text{ (car } A \text{ convexe)} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} d x_n + (1-d) y_n \\ &= dx + (1-d)y = z \end{aligned}$$

Il est clair que $z \in \bar{A}$.
Ce qui montre que $[x, y] \subset \bar{A}$
 $\Rightarrow \bar{A}$ convexe.

3) a) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists r_1 > 0$ tq $B(x, r_1) \subset A$
 $y \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists r_2 > 0$ tq $B(y, r_2) \subset A$

$\Rightarrow \exists r = \min(r_1, r_2) > 0$ et $B(x, r) \subset A$
 $B(y, r) \subset A$

Soit $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ et $u \in B(z, r)$
 $x_1 = u + (1-\lambda)(x-y) \in B(x, r)$
 $x_1 - x = u + (1-\lambda)(x-y) - x$
 $= u - \lambda x + (1-\lambda)y$
 $= u - z$

$\Rightarrow \|x_1 - x\| = \|u - z\| < r$

$\Rightarrow x_1 \in B(x, r) \subset A$

de m $x_2 = u + \lambda(y-x) \in B(y, r) \subset A$

$\Rightarrow x_1$ et $x_2 \in A = \text{Convexe}$

Alors $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$

$\Rightarrow u \in A \Rightarrow B(z, r) \subset A \Rightarrow z \in A$

$\Rightarrow [x, y] \subset A$

D'où A° est convexe.

Exercice 4

$A = \mathbb{Z}$

$C_{\mathbb{Z}} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$

or $]n, n+1[$ est ouvert, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$ est un ouvert

$\Rightarrow C_{\mathbb{Z}}$ est un ouvert

$\Leftrightarrow \mathbb{Z}$ est un fermé.

$\Leftrightarrow \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$

+ Mq $\mathbb{Z}^\circ = \emptyset$

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{Z}^\circ$

$\Rightarrow \exists r > 0$ tq $]n-r, n+r[\subset \mathbb{Z}$

Ce qui est impossible.

D'où $\mathbb{Z}^\circ = \emptyset$

$\bullet \text{Fr}(\mathbb{Z}) = \overline{\mathbb{Z}} \setminus \mathbb{Z}^\circ = \overline{\mathbb{Z}}$

$\bullet B =]a, b]$

ona $B^\circ \subset B$

$\forall x \in]a, b[: \exists r = \min(|x-a|, |x-b|)$
 tq $]x-r, x+r[\subset]a, b[$

$\Rightarrow]a, b[\subset B^\circ \subset]a, b]$

De plus $\forall r > 0,]b-r, b+r[\not\subset]a, b]$

Ainsi $\overline{B} =]a, b]$

$\bullet$ Mq $\overline{B} = [a, b]$

ona $B \subset \overline{B} \Rightarrow]a, b] \subset \overline{B}$



$$a \in \overline{B}, \text{ car}$$

$$\forall r > 0, \exists a-r, a+r[\cap]a, b[\neq \emptyset$$

$$\Rightarrow]a, b[\subset \overline{B}.$$

$$\bullet \text{ si } x > b \Rightarrow \exists r = \frac{x-b}{2} \quad \text{---} \quad x \notin \overline{B}$$

$$\exists x-r, x+r[\cap]a, b[= \emptyset$$

$$\Rightarrow x \notin \overline{B}.$$

$$\bullet \text{ si } x < a; \exists r = \frac{a-x}{2}$$

$$\exists x-r, x+r[\cap]a, b[= \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{B}$$

$$\Rightarrow \overline{B} = [a, b]$$

$$\bullet \underline{C = \mathbb{Q}}$$

Rappel

$$\forall x \neq y (x < y),$$

$$\bullet \exists d \in \mathbb{Q} \text{ tq } x < d < y$$

$$\bullet \exists q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ tq } x < q < y$$

$$\text{Mq } \mathbb{Q}^0 = \emptyset.$$

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{Q}^0$, alors

il existe $r > 0$ tq $\exists x-r, x+r[\subset \mathbb{Q}$.

puisque $x-r < x+r \Rightarrow \exists q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

tq $x-r < q < x+r \Rightarrow \exists x-r, x+r[\cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$

Ce qui est contradictoire

$$\Rightarrow \overline{\mathbb{Q}^0} = \emptyset$$

$$\bullet \text{ Mq } \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

$$\text{On a } \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}. \forall r > 0, x-r < x+r$$

alors il existe $d \in \mathbb{Q}$ tq $x-r < d < x+r$

$$\Rightarrow \exists x-r, x+r[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow x \in \overline{\mathbb{Q}}. \Rightarrow \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Q}}$$

$$\text{Ainsi } \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

$$\bullet \text{ Fr}(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}^0 = \mathbb{R}.$$

De m. on montre que

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \emptyset, \quad \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

$$\text{et } \text{Fr}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}.$$

$$\text{3). } n \in \mathbb{N}^*, A \in \text{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\text{a) Soit } P(x) = \det(A + xI_n)$$

P est un polynôme, alors il admet un nombre fini de racines dans l'intervalle

$$] -\alpha, \alpha[\Leftrightarrow \exists E \in] -\alpha, \alpha[\text{ tq } P(E) = 0$$

$$\text{Soit } B = A + E I_n \Rightarrow \det B = P(E) \neq 0$$

$\Rightarrow B$ est inversible.

$$\text{b) Soit } \alpha > 0, \text{ d'après a) } \exists E \in] -\alpha, \alpha[\text{ tq } B = A + E I_n \text{ est inversible.}$$

$$\|B - A\| = \|E I_n\| = \|E\| \|I_n\| < \alpha \Rightarrow B \in B(A, \alpha)$$

$$\Rightarrow B(A, \alpha) \cap \text{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset \Rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ est dense dans } \text{M}_n(\mathbb{K})$$

Exercice 4

$$P \in \mathbb{R}[X] \rightarrow E$$

$$N(P) = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!}$$

1) Montrer que N est une norme sur E .

• Soit $P \in E$ tel que $N(P) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{P^{(k)}(0)}{k!} = 0, \forall 0 \leq k \leq \deg P$$

ou $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \Rightarrow a_k = 0, \forall 0 \leq k \leq \deg P$

$$\Rightarrow P = \tilde{0}$$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$N(\lambda P) = |\lambda| N(P)$$

• Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$N(P+Q) = \sum_{k=0}^{\deg(P+Q)} \frac{|(P+Q)^{(k)}(0)|}{k!}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\deg(P+Q)} \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!} + \sum_{k=0}^{\deg Q} \frac{|Q^{(k)}(0)|}{k!}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!} + \sum_{k=0}^{\deg Q} \frac{|Q^{(k)}(0)|}{k!}$$

$$\leq N(P) + N(Q)$$

Alors N est une norme sur E .

2) On a: $N(P) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!}$

$$= \sum_{k=0}^{\deg P} |a_k|$$

Alors pour $P_n(x) = x^n$:

$$N(P_n) = 1.$$

3) $D: E \rightarrow E$
 $P \mapsto D(P) = P'$

D est linéaire.

• Pour $P_n(x) = x^n \rightarrow N(P_n) = 1$

et $D(P'_n(x)) = nx^{n-1} \rightarrow N(D(P_n)) = n$

$$\Rightarrow \frac{N(D(P_n))}{N(P_n)} = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Alors l'app D n'est pas continue.

4) Soit $\gamma_n: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $P \mapsto \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$

γ_n est linéaire.

• Soit $P \in E$.

$\rightarrow$ Si $n > \deg P \Rightarrow P^{(n)}(0) = 0 \Rightarrow$

$$|\gamma_n(P)| = \frac{|P^{(n)}(0)|}{n!} \leq \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!} = N(P)$$

$\rightarrow$ Si $n \leq \deg P$, alors

$$\frac{|P^{(n)}(0)|}{n!} \leq \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!} = N(P)$$

(9)

Alors $\forall p \in E$.

$$|p^{(n)}(0)| \leq n! N(p)$$

$$|\varphi_n''(0)| \leq n! N(p)$$

Alors φ_n est continue sur E .

3.) f précède g ($f < g$)

$$G = \{ f \in E \mid f < g \}$$

$$= \{ f \in E \mid f^{(n)}(0) \leq g^{(n)}(0), \forall n \in \mathbb{N} \}$$

$$= \{ f \in E \mid \varphi_n(f) \leq g^{(n)}(0), \forall n \in \mathbb{N} \}$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n^{-1}(\text{J-}\infty, g^{(n)}(0)]$$

On a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{J-}\infty, g^{(n)}(0)]$ est un fermé et φ_n est continue. Alors

$\varphi_n^{-1}(\text{J-}\infty, g^{(n)}(0)]$ est un fermé.

Alors G est un fermé. Comme étant une intersection qeq de fermés

Exercice 11.

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| ; \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

$$\|f\| = \|f\|_{\infty} + \|f\|_1$$

Il est facile de vérifier que l'application $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

$$\|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|f\|_1 = \|f\|$$

De plus $\|f\|_1 \leq \|f\|_{\infty}$.

$$\Rightarrow \|f\| \leq 2\|f\|_{\infty}$$

Ainsi

$$\|f\|_{\infty} \leq \|f\| \leq 2\|f\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow \|\cdot\|_{\infty} \sim \|\cdot\|$$

b) $\|\cdot\|_1 \not\sim \|\cdot\|_{\infty}$.

Pour $f_n(x) = x^n, \forall x \in [0,1]$

$$\|f_n\|_{\infty} = 1 \text{ et } \|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\|f_n\|_{\infty}}{\|f_n\|_1} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

3.)

$$L: E \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto L(f) = f(0)$$

L est linéaire.

$$|f(0)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = \|f\|_{\infty} \leq \|f\|$$

$$\Rightarrow |L(f)| \leq \|f\| \Rightarrow L \text{ est continue sur } E.$$

Donc $\forall f \in E; |L(f)| \leq \|f\|$.
 Mais si $\|f\| \leq 1$; alors $|L(f)| \leq 1$
 donc l'app $f \mapsto |L(f)|$ est bornée sur $B_f(0,1)$, d'où $\sup_{\|f\| \leq 1} |L(f)|$ existe.

c) $\forall t \in [0,1]; f_n(t) = (1-t)^n$

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 (1-t)^n dt = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

Alors: $\frac{|L(f_n)|}{\|f_n\|_1} = \frac{|f_n(0)|}{\|f_n\|_1} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

on en déduit que L n'est pas continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$.

d) puisque L est continue dans $(E, \|\cdot\|)$ mais L n'est pas " " $(E, \|\cdot\|_1)$

Alors $\|\cdot\|_1 \neq \|\cdot\|$.

e) Soit $A = \{f \in E \mid f(0) \geq 0\}$

Soit $y \in L(A) \Rightarrow \exists f \in A \mid y = L(f)$

$\Rightarrow y = f(0) \geq 0 \Rightarrow y \in [0, +\infty[$

$\Rightarrow L(A) \subset [0, +\infty[$

soit $a \in [0, +\infty[, \exists g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto a$

$\Rightarrow L(g) = g(0) = a \geq 0$

$\Rightarrow a \in L(A) \Rightarrow [0, +\infty[\subset L(A)$

Ainsi: $L(A) = [0, +\infty[$

b) Supposons que A est un compact
 Puisque L est continue dans $(E, \|\cdot\|)$

Alors $L(A)$ est compact ce qui est impossible car $L(A) = [0, +\infty[$ n'est pas bornée
 $\Rightarrow A$ n'est pas compact.

* $A = L^{-1}([0, +\infty[)$

L continue dans $(E, \|\cdot\|)$ $\Rightarrow$
 et $[0, +\infty[$ est un fermé
 A est un fermé.

Exercice 4 "Indications"

2/a) On a $|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p$

ou $|f(x)| + |g(x)| \leq \max(|f(x)|, |g(x)|)$

$\Rightarrow (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p \max(|f(x)|^p, |g(x)|^p)$
 $\leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p)$

5/a) $(|f+g|^{p-1})^q = |f+g|^p$ car $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

d'après 2) puisque $f, g \in L^p$
 alors $f+g \in L^p$

exercice 7

1) $A \subset E$ et $B \subset F$, $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$
 Pq A compact de E et B compact de F
 ssi $A \times B$ est un compact de $E \times F$.

" $\Rightarrow$ " soit (z_n) une suite d'éléments de $A \times B$
 $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A, \exists y_n \in B$
 tq $z_n = (x_n, y_n)$

• (x_n) est une suite d'éléments de A .
 qui est compact, alors $\exists (x_{\varphi(n)})$ suite
 de (x_n) tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = x \in A$

• $(y_{\varphi(n)})$ est une suite d'éléments de B
 qui est compact, alors $\exists (y_{\varphi(\varphi(n))})$

Suite $(y_{\varphi(n)})$ tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\varphi(n)} = y \in B$

Alors la suite $(z_{\varphi(\varphi(n))})$ est une
 s-suite de (z_n) et vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_{\varphi(\varphi(n))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{\varphi(\varphi(n))}, y_{\varphi(\varphi(n))})$$

$= (x, y) \in A \times B$
 ce qui montre que $A \times B$ est un compact.

" $\Leftarrow$ " hyp $A \times B$ est un compact
 Pq A est un compact.

Soit (x_n) suite d'éléments de A .

Puisque $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists b \in B$

$\Rightarrow$ la suite $(z_n) = (x_n, b)$ est une

suite d'éléments de $A \times B$, alors

$\exists (z_{\varphi(n)}) = (x_{\varphi(n)}, b)$. Sans suite

de (z_n) tq $z_{\varphi(n)} \rightarrow z \in A \times B$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{\varphi(n)}, b) = z \in A \times B$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = x \in A$

$\Rightarrow A$ est compact.

De m B est compact.

2) $f: A \rightarrow F$ continue.

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

a) hyp A est fermé, mq $G(f)$ est un

soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments

de $G(f) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A$

$$z_n = (x_n, f(x_n))$$

Si $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z$, m.g. $z \in G(f)$

On a: $z_n = (x_n, f(x_n)) \rightarrow z = (x, y) \in E \times F$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = y$$

Comme A est fermé et $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$
alors $x \in A$.

D'autre part f est continue sur A .
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = (x, f(x)) \text{ avec } x \in A$$

$$\Rightarrow z = (x, f(x)) \in G(f)$$

Ainsi $G(f)$ est un fermé de $E \times F$.

b) Mq $G(f)$ est un fermé $\Leftrightarrow A$ Compact.

" $\Leftarrow$ " Si A est un compact, $\dots$
est un fermé, d'après a) $G(f)$ est
un fermé.

" $\Rightarrow$ " hyp $G(f)$ est un fermé, m.g.
 A est Compact.

Exercice 9

$\forall x \in E$; $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$; $B = (e_1, e_2, \dots)$ base de

1. Soit $x \in E$ q $\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow$
 $\max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}; |x_k| = 0$
 $\Leftrightarrow x_k = 0, \forall k \in \{1, \dots, n\}$.

$$\Rightarrow x = 0^E$$

Soient $\lambda \in K$; $x \in E$:

$$\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \sup_{1 \leq k \leq n} \|x_k\| = |\lambda| \|x\|_\infty$$

Soient $x \in E$ et $y \in E$

$$\|x+y\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k + y_k| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| + \max_{1 \leq k \leq n} |y_k|$$

$$\leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

$\Rightarrow \|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E

2) a) $\|\cdot\|_\infty$ une norme q.e.q sur E .

$$\forall x \in E: x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$$\|x\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\|$$

$$\text{or } \forall i \in \{1, \dots, n\}; |x_i| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

$$\Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_\infty \cdot \sum_{i=1}^n \|e_i\|$$

$$\Rightarrow \exists c = \sum_{i=1}^n \|e_i\| > 0 \text{ car } e_i \neq 0, \forall i$$

$$\|e_i\| > 0$$

$$\text{q} \quad \|x\| \leq c \cdot \|x\|_\infty$$

3) l'application $\text{id} : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$
 $x \mapsto x$

est linéaire
 $\dim E < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{id}$ est continue

c) $S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$

Π_9 S est un compact dans $(E, \|\cdot\|)$

On a l'application $\text{id} : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$
 est continue.

$S = S(0,1)$ dans $(E, \|\cdot\|)$
 fermé et borné

$\dim E < \infty$

S est un compact dans $(E, \|\cdot\|)$

$\Rightarrow \text{id}(S) : \text{est un compact de } (E, \|\cdot\|)$

4) L'app $f : (E, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \|x\|$

$\forall x, \forall y: |f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

$\Rightarrow f$ est 1-Lipschitz

$\Rightarrow f$ est continue

5) a) $f = \|\cdot\|$ est continue et a valeurs dans $\mathbb{R}$.

comme S est un compact, alors : est bornée et atteint ses bornes sur S

$\Rightarrow \alpha = \inf_{x \in S} f(x)$ existe.

et $\exists x_0 \in S$ tq $\alpha = \inf_{x \in S} f(x) = f(x_0)$
 $\alpha = \inf_{x \in S} \|x\| = \|x_0\|$

$x_0 \in S \Rightarrow x_0 \neq 0_E \Rightarrow \|x_0\| \neq 0$

$\Rightarrow \alpha = \inf_{x \in S} \|x\| > 0$

b) On a $\alpha = \inf_{x \in S} \|x\| \Rightarrow$

$\forall x \in S; \|x\| \geq \alpha$

Soit $x \in E \setminus \{0\} \Rightarrow y = \frac{x}{\|x\|} \in S \Rightarrow$

$\|y\| \geq \alpha \Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| \geq \alpha$

$\Rightarrow \|x\| \geq \alpha \cdot \|x\| \cdot \forall x \in E \setminus \{0\}$
 vrai aussi pour $x = 0$

$\Rightarrow \forall x \in E; \|x\| \geq \alpha \|x\|$

c) D'après 2-a) et 5-b)

$\exists c > 0, \exists \alpha > 0$ tq

$\alpha \|x\| \leq \|x\| \leq c \|x\|$

$\forall x \in E$

$\Rightarrow \|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|$