

Correction série III e. d. n

Exercice 1

1) Les applications d_A et g_A sont linéaires sur $M_p(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, alors elle sont continue

2) $\pi \in M_p(\mathbb{R})$ la suite $(\pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée $\Leftrightarrow \exists k \geq 0$ tq.

$$\|\pi^n\| \leq k, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \pi^k \Rightarrow \|U_n\| \leq \frac{\sum_{k=0}^n \|\pi^k\|}{n+1}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \|U_n\| \leq \frac{k \cdot n}{n+1} \leq k.$$

$\Rightarrow$ la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée de $M_p(\mathbb{R})$

et comme $\dim M_p(\mathbb{R}) < \infty$, alors

(U_n) admet au moins une valeur d'adhérence ①

dans $M_p(\mathbb{R})$.

$$3) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}; \quad \pi U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \pi^{k+1} = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n \pi^k \right) \cdot \pi$$

$$= U_n \cdot \pi$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \pi^k$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n \pi^k + \pi^{n+1} - \pi^0 \right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \left((n+1)U_n + \pi^{n+1} - \pi^0 \right)$$

$$\pi U_n = U_n + \frac{1}{n+1} (\pi^{n+1} - \pi^0)$$

4) Soit L une valeur d'adhérence de (U_n)

$$a) \exists (U_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ tq } U_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L$$

$$\text{D'après 3/ } \pi U_{\varphi(n)} = U_{\varphi(n)} \pi = U_{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n)+1} (\pi^{\varphi(n)+1} - \pi^0)$$

Puisque les applications d_n et g_n sont continues, alors

$$\pi U_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi L$$

$$\text{et } U_{\varphi(n)} \pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L \cdot \pi$$

D'autre part; la suite $(\pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

$$\|M^n\| \leq k, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\|M^{q(n)+1} - I_p\| \leq \frac{k + \|I_p\|}{q(n)+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \frac{M^{q(n)+1} - I_p}{q(n)+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

En passant à la limite dans la relation en on obtient :

$$ML = LM = L$$

Puisque $ML = LM = L$, on vérifie par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k L = LM^k = L$

$$\Rightarrow U_n L = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n M^k L = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n L M^k = L \cdot M = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n L = L$$

5) Soit L_1 et L_2 deux valeurs d'adhérence de la suite (U_n) , alors il existe deux sous suites $(U_{q(n)})$ et $(U_{r(n)})$ telles que :

$$\Rightarrow \exists (U_{q(n)}) \text{ et } (U_{r(n)}) \text{ tq}$$

$$U_{q(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L_1$$

$$\text{et } U_{r(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L_2$$

D'après 4) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n L_2 = L_1 U_n$

$$\Rightarrow U_{q(n)} L_1 = L_1 U_{q(n)} = L_1$$

Par passage à la limite et en utilisant la continuité des app de L_1 et g_{L_1}

On déduit que $L_2 L_1 = L_1 L_2 = L_1$

De même en utilisant $U_{r(n)} L_2 = L_2 U_{r(n)}$

On déduit $L_2 L_1 = L_1 L_2 = L_2$

Ainsi $L_2 = L_1$

6) (U_n) est une suite bornée $\Rightarrow$

$$(U_n) \in B_{[0,k]} = \text{compact (d'après)}$$

De plus (U_n) admet une seule valeur d'adhérence, alors (U_n) converge vers cette valeur d'adhérence.

exercice 2

l'application $\det: M_n(K) \rightarrow K$
est une application polynomiale.
en les coefficients de la matrice, alors
elle est continue.

$$GL_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \det A \neq 0\} \\ = \det^{-1}(K^*)$$

Comme K^* est un ouvert de K
et l'app $\det$ est continue. $\Rightarrow$

$GL_n(K)$ est un ouvert.

• Il y a $GL_n(K)$ est dense dans $M_n(K)$

Soit $A \in M_n(K)$, puisque l'ensemble

des v.p de A est finie, alors

$\exists p_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall p > p_0$: $\frac{1}{p}$ n'est pas v.p de A

$\Rightarrow$ on n'est pas v.p de $A_p = A - \frac{1}{p} I_n$

$\Rightarrow A_p$ est inversible

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} A_p = A$$

$$A_p \in GL_n(K)$$

$$\Rightarrow \overline{GL_n(K)} = M_n(K)$$

4) Il y a $GL_n(K)$ n'est pas bornée.

Soit $(D_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par.

$$D_k = \begin{pmatrix} k & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \det D_k = k \neq 0 \Rightarrow D_k \in GL_n(K)$$

$$\|D_k\|_1 = k + (n-1) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

Ce qui montre que $GL_n(K)$ n'est pas bornée.

5) $\det: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ n'est pas continue par rapport à $GL_n(\mathbb{R})$

6) Soient $A, B \in M_n(K)$

$$\text{Il y a } \chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$$

1er cas Si A est inversible.

$$\begin{aligned} \chi_{AB}(x) &= \det(xI_n - AB) \\ &= \det(A(xI_n - BA)A^{-1}) \\ &= \det A \cdot \det(xI_n - BA) \det A^{-1} \\ &= \det(xI_n - BA) \\ &= \chi_{BA}(x) \end{aligned}$$

2e cas. Soit $A \in M_n(K)$ (n'est pas forcément inversible)
puisque $GL_n(K)$ est dense dans $M_n(K)$, alors $\exists A_p \in GL_n(K)$ tq

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} A_p = A$$

D'après 1^{er} cas $X_{A_p B}(x) = X_{B A_p}(x)$

$$\Leftrightarrow \det(A_p B - x I_n) = \det(B A_p - x I_n)$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} A_p B = AB \quad (L' \text{ app } \pi \mapsto \pi B \text{ continue})$$

L'app $\det$ est continue

Alors $\lim_{p \rightarrow +\infty} \det(A_p B - x I_n) = \det(AB - x I_n)$

de m $\lim_{p \rightarrow +\infty} \det(B A_p - x I_n) = \det(BA - x I_n)$

Ainsi $X_{AB}(x) = X_{BA}(x)$

$$7) \quad SL_n(K) = \{ A \in M_n(K) \mid \det A = 1 \}$$

$$= \det^{-1}(\{1\})$$

$\det$ est continue $\Rightarrow SL_n(K)$ fermé

$$\Rightarrow \overline{SL_n(K)} = SL_n(K)$$

$$\cdot \quad \pi_0 SL_n(K) = \emptyset$$

Supposons que $SL_n(K) \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \exists A \in SL_n(K) \Rightarrow \exists n > 0 \text{ tq}$$

$$B(A, n) \subset SL_n(K)$$

$$\text{soit } P(x) = \det(A + x I_n) - 1$$

P est un polynôme, alors il admet un nombre un nombre fini de racines dans

$$\mathbb{F}, n, r \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists t_0 \in \mathbb{F}, n, r \in \mathbb{Z} \text{ tq}$$

$$P(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A + t_0 I_n) \neq 1$$

$$\text{Soit } C = A + t_0 I_n \Rightarrow \det C \neq 1$$

$$\Rightarrow C \notin SL_n(K)$$

D'autre part $C - A = t_0 I_n$

$$\Rightarrow \|C - A\| = |t_0| \quad (\text{on choisit } \|I_n\| = 1)$$

$$\Rightarrow \|C - A\| < n$$

$$\Rightarrow C \in B(A, n) \subset SL_n(K) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{absurde} \\ \det C \neq 1 \end{array} \right.$$

$$\text{Alors } SL_n(K) = \emptyset$$

$$8) \text{ a) soit } A_p = \begin{pmatrix} p & & \\ & 1/p & \\ & & \ddots \end{pmatrix} : p \in \mathbb{N}^+$$

$$\|A_p\| = p + \frac{1}{p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{et } A_p \in SL_n(K) \quad (\det A_p = 1)$$

$$(A_p) \text{ suite de } SL_n(K) \text{ avec } \|A_p\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\Rightarrow SL_n(K) \text{ n'est pas bornée.}$$

$$b) \quad SL_n(K) \text{ n'est pas bornée} \Rightarrow SL_n(K) \text{ n'est pas compact.}$$

Exercice 3

1) Il est facile de vérifier que $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$

2) $\Pi_n(\mathbb{R})$ est un groupe.

Soit $\pi \in \Pi_n(\mathbb{R})$ tq ${}^t\pi \cdot \pi = I_n$

$$\Rightarrow \det({}^t\pi \pi) = 1 \Rightarrow (\det \pi)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \det \pi \neq 0. \Rightarrow \pi \text{ est inversible.}$$

Ainsi $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

Comme $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ est un groupe, il suffit de montrer que $(O_n(\mathbb{R}), \cdot)$ est un sous groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$

On a $I_n \in O_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in O_n(\mathbb{R}), B \in O_n(\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow {}^tA \cdot A = I_n \text{ et } {}^tB \cdot B = I_n$$

$${}^t(AB)(AB) = {}^tB \cdot {}^tA \cdot A \cdot B = {}^tB \cdot B = I_n$$

$$\Rightarrow \underline{AB \in O_n(\mathbb{R})}$$

3) ...

$$\text{On a } {}^tA \cdot A = I_n \Rightarrow {}^tA = A^{-1} \Rightarrow I_n = ({}^tA)^{-1} A^{-1}$$

$$\Rightarrow {}^t(A^{-1}) A^{-1} = I_n \Rightarrow A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$$

(5)

Ainsi $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$

* $\Pi_n(\mathbb{R})$ est un compact.

$$O_n(\mathbb{R}) = \{ \pi \in \Pi_n(\mathbb{R}) \text{ tq } f(\pi) = I_n \}$$

$$= f^{-1}(\{I_n\})$$

$$\text{avec } f: \Pi_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

$$\pi \longmapsto f(\pi) = {}^t\pi \cdot \pi.$$

Π_n f est continue sur $\Pi_n(\mathbb{R})$.

$$\text{Soit } g: \Pi_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \Pi_n(\mathbb{R}) \times \Pi_n(\mathbb{R})$$

$$\pi \longmapsto ({}^t\pi, \pi)$$

$$\text{et } h: \Pi_n(\mathbb{R}) \times \Pi_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

$$(A, B) \longmapsto A \cdot B$$

g est linéaire $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow g \text{ est continue} \\ \dim \Pi_n(\mathbb{R}) < \infty \end{array} \right.$

h est bilinéaire $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow h \text{ est continue} \\ \dim \Pi_n(\mathbb{R}) < \infty \end{array} \right.$

Alors $f = h \circ g$ est continue.

$$O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$$

f est continue. $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow O_n(\mathbb{R}) \text{ est un fermé} \\ \{I_n\} \text{ est un fermé} \end{array} \right.$

$\forall \pi \in O_n(\mathbb{R}); \quad \|\pi \cdot \pi\| = I_n$
 $\Rightarrow \|\pi\| = \sqrt{\|\pi \cdot \pi\|} = \sqrt{\|I_n\|} = 1$
 $\Rightarrow O_n(\mathbb{R}) \subset S(0,1) \Rightarrow O_n(\mathbb{R})$ est bornée

$O_n(\mathbb{R})$ est fermé.
 $O_n(\mathbb{R})$ bornée.
 $\dim O_n(\mathbb{R}) < \infty$

$\Rightarrow O_n(\mathbb{R})$ compact

3) Si $\pi \in O_n(\mathbb{R})$ alors $(\det \pi)^2 = 1$
 $\Rightarrow \det \pi = \pm 1 \Leftrightarrow \det \pi \in \{-1, 1\}$

Supposons que $O_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Comme l'application $\det$ est continue de $O_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors $\det(O_n(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs

$\{-1, 1\}$

ce qui est absurde puisque $\{-1, 1\}$ n'est pas connexe par arcs de $\mathbb{R}$.

4) Puisque $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs, alors il n'est pas connexe.

- 179 $O_n^+(\mathbb{R})$ est un groupe compact

• On a: $O_n^+(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R})$

$I_n \in O_n^+(\mathbb{R})$

Soit $A, B \in O_n^+(\mathbb{R})$

$\Rightarrow AB^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ et $\det(AB^{-1}) = \det A \cdot \frac{1}{\det B} = 1$

D'où $AB^{-1} \in O_n^+(\mathbb{R})$

$\Rightarrow O_n^+(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$. $\Rightarrow O_n^+(\mathbb{R})$ est un groupe

D'autre part on a

$O_n^+(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\}) \cap O_n(\mathbb{R})$

$\{1\}$ fermé } $\Rightarrow \det^{-1}(\{1\})$ est un fermé
 $\det$ continue

et on a $O_n(\mathbb{R})$ fermé. Alors

$O_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé

$O_n^+(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R})$ compact $\Rightarrow$

$O_n^+(\mathbb{R})$ est un compact

1) L'application N est continue et a valeur dans $\mathbb{R}$.

Comme $O_n^+(\mathbb{R})$ est compact, alors N est bornée, et atteint ses bornes sur $O_n^+(\mathbb{R}) \iff$

$$\exists A_0 \in O_n^+(\mathbb{R}) \text{ tq. } \sup_{M \in O_n^+(\mathbb{R})} N(M) = N(A_0)$$

2a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow {}^t R_\theta R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R_\theta \in O_2^+(\mathbb{R})$$

Soit $A \in O_2^+(\mathbb{R})$

On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} {}^t A \cdot A = I_n \\ \text{et } \det A = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{et } ad - bc = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ba + dc = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases} \text{ et } ad - bc = 1$$

$$a^2 + c^2 = 1 \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tq. } \begin{cases} a = \cos \theta \\ c = \sin \theta \end{cases}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} (a-d)^2 + (b+c)^2 &= a^2 + d^2 - 2ad + b^2 + c^2 + 2bc \\ &= 2 + 2(\underbrace{bc - ad}_{-1}) \end{aligned}$$

$$(a-d)^2 + (b+c)^2 = 0$$

$$\text{Alors } (a-d)^2 + (b+c)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = d \text{ et } b = -c$$

$$\text{Ainsi } A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

b) Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow O_2^+(\mathbb{R})$
 $\theta \mapsto R_\theta$

Puisque les fonctions $\theta \mapsto \cos \theta$ et $\theta \mapsto \sin \theta$ sont continues, alors la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\text{D'après a/ } A \in O_2^+(\mathbb{R}) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}$$

$$\text{tq. } A = R_\theta. \text{ Alors } f(\mathbb{R}) = O_2^+(\mathbb{R})$$

Comme $\mathbb{R}$ est connexe par arcs et f est continue, alors

$f(\mathbb{R}) = O_2^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

$D_n(\mathbb{K}) = \{ A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ tq. } A \text{ est diagonalisable} \}$

1) a) Soit $A \in D_n(\mathbb{K})$, tq. $[A, \tilde{0}] \subset D_n(\mathbb{K})$

Soit $B \in [A, \tilde{0}] \Leftrightarrow \exists t \in [0, 1]$

tq. $B = tA$.

Puisque A est diagonalisable, alors

$B = tA$ est diagonalisable

$\Rightarrow [A, \tilde{0}] \subset D_n(\mathbb{K})$

Alors $D_n(\mathbb{K})$ est étoilé γ à $\tilde{0}$.

b) Toute partie étoilée est connexe par arcs.

2) Soit $A_k = \begin{pmatrix} k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \end{pmatrix}$

$$N(A_k) = \sqrt{\text{tr}(A_k A_k^*)} = \sqrt{k^2} = k$$

$$N(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$$

et $\text{tr}(A_k)$ est une suite d'éléments de $D_n(\mathbb{K})$, alors $D_n(\mathbb{K})$ n'est pas bornée

3) tq. $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors A est triangulable

$\Rightarrow \exists T \in M_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq.

$$A = P T P^{-1}$$

avec $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les λ_p de A .

on pose $\alpha_p = \lambda_1$
on choisit une suite (ϵ_p) tq.

$$\epsilon_p \leq \frac{1}{p} \quad \lambda_p = \lambda_1 + \epsilon_p \neq \lambda_1$$

on construit de proche en proche des réels $\alpha_p^k = \lambda_k + \epsilon_p^{k-1} \neq \alpha_p^i \quad \forall 1 \leq i \leq k-1$
avec $\epsilon_p^{k-1} \leq \frac{1}{p^{k-1}}$

on pose $T_p = \begin{pmatrix} \alpha_p^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_p^n \end{pmatrix}$

La matrice T_p est à valeurs propres $\alpha_p^i \neq \alpha_p^j$, alors elle est diagonalisable.

De plus $\lim_{p \rightarrow +\infty} T_p = T$ car $\alpha_p^i \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \lambda_i$

Puisque l'app $\pi_1 \mapsto P \pi P^{-1}$ est continue, alors $\lim_{p \rightarrow +\infty} P T_p P^{-1} = P T P^{-1} = A$

$\Rightarrow \lim_{p \rightarrow p_0} A_p = A$
 avec $A_p = P T_p P^{-1}$
 A_p est diagonalisable. puisque T_p est
 ce qui montre que $\overline{D_n(\mathbb{C})} = M_n(\mathbb{C})$

W a) L'app $f: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$
 $\pi \mapsto X_\pi(\pi)$
 on a: X_π est un polynôme de degré n
 $\Leftrightarrow X_\pi(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \quad (a_n = 1)$
 $\Rightarrow X_\pi(\pi) = \sum_{k=0}^n a_k \pi^k$

+ on a l'app $f_k: \pi \mapsto \pi^k$ est continue
 soit $g_k: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow (M_n(\mathbb{C}))^k$
 $\pi \mapsto (\pi, \pi^2, \dots, \pi^k)$
 et
 $h_k: M_n(\mathbb{C}) \times \dots \times M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$
 $(A_1, A_2, \dots, A_k) \mapsto A_1 A_2 \dots A_k$
 g_k est linéaire $\Rightarrow g_k$ continue
 $\dim M_n(\mathbb{C}) < \infty$
 h_k est multilinéaire $\Rightarrow h_k$ est continue
 $\dim M_n(\mathbb{C}) < \infty$

Alors $f_k = h_k \circ g_k$ est continue sur $M_n(\mathbb{C})$

On déduit que l'app
 $\pi \mapsto X_\pi(\pi) = \sum_{k=0}^n a_k \pi^k$ est
 continue.

b) si D est diagonale.

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$\text{alors } X_D(D) = \text{diag}(X_D(\lambda_1), \dots, X_D(\lambda_n))$$

puisque les λ_i de D sont
 les racines de X_D , alors $X_D(\lambda_i) = 0, \forall i \leq n$

$$\Rightarrow X_D(D) = 0$$

c) $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$. D'après 3/ $\exists (A_p)$ une
 suite de matrices diagonalisables $\lim_{p \rightarrow \infty} A_p = A$.

Puisque l'app $\pi \mapsto X_\pi(\pi)$ est
 continue, alors $\lim_{p \rightarrow \infty} X_{A_p}(A_p) = X_A(A)$
 $\Rightarrow X_A(A) = 0$