

Exercice 3

$$1) \leq |f(x) \cdot g(x)| \leq \frac{c}{2} (f^2(x) + g^2(x))$$

$$2) H(I) \text{ de } \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$$

$$3) \|f\|_H = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

$$\text{avec } \langle \cdot, \cdot \rangle : H(I) \times H(I) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$6) I =]0, +\infty[$$

$$a) K(I) = \{f \in H(I) \mid f(0) = 0\}$$

$$g(x) = f'(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t) dt, c > 0$$

$$x \mapsto e^{cx} f(x) \text{ continue } [0, \infty[$$

$\Rightarrow$ get derivable et

$$g'(x) + c g(x) = f(x), \forall x \geq 0$$

$$* \text{ soit } f \in L_2(I), \forall g \in K(I)$$

$$g(0) = 0$$

$$\rightarrow g(x) g'(x) + c g^2(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f, g) \mapsto \int_I f(x) g(x) dx + \int_I f(x) g'(x) dx$$

$$\forall x \geq 0;$$

$$\int_0^x g(t) g'(t) dt + c \int_0^x g^2(t) dt = \int_0^x f(t) g(t) dt$$

$$\alpha \int_0^x f(t) g(t) dt \leq \left(\int_0^x f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^x g^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow C \int_0^x g^2(t) dt \leq \left(\int_0^x f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^x g^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} g^2(x)$$

$$\leq \left(\int_0^x f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^x g^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{si } \int_0^x g^2(t) dt \neq 0$$

$$\Rightarrow C \left(\int_0^x g^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^x f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

qui est vrai si $\int_0^x g^2(t) dt = 0$.

$$\Rightarrow \int_0^x g^2(t) dt \leq \frac{1}{C^2} \int_0^x f^2(t) dt, \forall x \geq 0$$

est majoré.

$$\Rightarrow \int_0^\infty g^2(t) dt < \infty$$

$\Rightarrow g^2$ est intégrable sur $[0, \infty[$

$$\alpha g' = f - Cg$$

et f est intégrable sur $[0, \infty[$

$\Rightarrow (g')^2$ est intégrable sur $[0, \infty[$

on aboutit avec la proposition 2

$$\int_0^\infty g^2(t) dt \leq \frac{1}{C^2} \int_0^\infty f^2(t) dt$$

$$\Rightarrow \|g\|_2 \leq \frac{1}{C} \|f\|_2$$

Rappel:

Th 1

$f: (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ linéaire

est continue. $\Leftrightarrow$

$\exists \pi > 0$ s.t. $\|f(x)\|_F \leq \pi \cdot \|x\|_E, \forall x \in E$

Ex.

Soit $\varphi: (C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$
 $f \mapsto \varphi(f) = f(0)$.

φ est linéaire

$|\varphi(f)| = |f(0)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty, \forall f \in E$

$\Rightarrow \varphi$ est continue.

Th 2

Soit $f: E \rightarrow F$ linéaire

Si dim $E < \infty$, alors f est continue.

$$b) \exists A > 0 \text{ s.t. } \|\varphi(f)\|_H \leq A \|f\|_E.$$

$$\|\varphi(f)\|_H = \|g\|_H^2 = \|g\|_2^2 + \|g'\|_2^2.$$

$$\text{car } \|g\|_2^2 \leq \frac{1}{c^2} \|f\|_2^2.$$

$$\text{et } g' = f - c g.$$

$$\Rightarrow \|g'\|_2 = \|f - c g\|_2 \leq \|f\|_2 + c \|g\|_2.$$

$$\leq \|f\|_2 + \|f\|_2 = 2\|f\|_2.$$

$$\Rightarrow \|g\|_H^2 \leq \left(\frac{1}{c^2} + 4\right) \|f\|_2^2.$$

$$\Rightarrow \|g\|_H \leq \sqrt{4 + \frac{1}{c^2}} \|f\|_2.$$

$$* \varphi: (L_2(I), \|\cdot\|_E) \longrightarrow (K(I), \|\cdot\|_H)$$

$$f \mapsto \varphi(f) = g.$$

φ est linéaire

$$\varphi(df + h)(x) = d\varphi(f)(x) + \varphi(h)(x)$$

$\forall x.$

$$\Rightarrow \varphi(df + h) = d\varphi(f) + \varphi(h).$$

et donc.

$$\|\varphi(f)\|_H \leq \sqrt{4 + \frac{1}{c^2}} \|f\|_E, \forall f \in L_2(I)$$

$\Rightarrow \varphi$ est continue.

Exercice 4.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

ih $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$
 $x \mapsto f(x) = Ax$.

est linéaire

donc $\mathbb{C}^n \subset \infty$ } est continue.

Donc $\exists C_A > 0$ tq. $\|f(x)\| \leq C_A \|x\|$

$$\Rightarrow \|Ax\| \leq C_A \|x\|, \forall x.$$

e) $N(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

d'après 1)

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq C_A, \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \text{ existe}$$

* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq. $N(A) = 0 \Leftrightarrow$

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \|Ax\| = 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow Ax = 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ et nous pouvons } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ax = 0, \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

$$\Leftrightarrow \ker A = \mathbb{C}^n. \Leftrightarrow A = 0_n.$$

* $N(dA) = |d| N(A)$
 $\forall d \in \mathbb{C}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$N(A+B) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|}$$

$$2 \quad \forall x \neq 0; \quad \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

$$\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

" $N(A) + N(B)$

$$\Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq N(A) + N(B).$$

$$\Leftrightarrow N(A+B) \leq N(A) + N(B).$$

4) Th. $N(AB) \leq N(A) \cdot N(B).$

$$\text{On a } N(AB) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|}$$

$$\forall x \neq 0; \quad \|ABx\| \leq N(A) \cdot \|Bx\|$$

$$\leq N(A) \cdot N(B) \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq N(A) \cdot N(B), \quad \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq N(A) \cdot N(B)$$

$$N(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq N(A)$$

$$\Rightarrow \|Ax\| \leq \|x\| \cdot N(A) \quad \forall x$$

$$5) \text{ Pour } e(A) \leq N(A)$$

$$\text{avec } e(A) = \max \{ |d| \mid d \text{ div } A \}$$

$$\text{soit } d \text{ div } A \Rightarrow \exists x_0 \neq 0, \text{ tel } Ax_0 = dx_0$$

$$\Rightarrow \|Ax_0\| = \|dx_0\| = |d| \|x_0\|$$

$$|d| = \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = N(A)$$

$$\Rightarrow \max \{ |d| \mid d \text{ div } A \} \leq N(A)$$

$$\Rightarrow e(A) \leq N(A)$$

$$6) \text{ Soit } \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} N(A_k) = 0$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tel } k \geq k_0 : N(A_k) < \epsilon$$

$$\text{or } N(A_k) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A_k x\|}{\|x\|} < \epsilon$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tel } k \geq k_0$$

$$\frac{\|A^k x\|}{\|x\|} < \epsilon, \forall x \neq 0$$

$$\text{soit } d_0 \in \mathbb{C} \text{ tel } e(A) = |d_0|$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{C}^n, x_0 \neq 0 \text{ tel } Ax_0 = d_0 x_0$$

$$\Downarrow$$

$$A^k x_0 = d_0^k x_0$$

$$\Rightarrow \frac{\|A^k x_0\|}{\|x_0\|} = |d_0|^k$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tel } k \geq k_0 :$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (e(A))^k = 0$$

$$\Rightarrow \underline{e(A)} < \epsilon$$

$$\frac{|d_0|^k}{(e(A))^k} < \epsilon$$

Autrement.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$; mg. $\rho(A^k) = (\rho(A))^k$

$\Downarrow$

A est trigonalisable.

$\Downarrow$
 $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$
 $\Rightarrow A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$
 $Sp(A^k) = \{ \lambda_i^k; \lambda_i \in Sp(A) \}$
 $\Rightarrow \rho(A^k) = (\rho(A))^k$

D'après 5/.

$\rho(A^k) \leq N(A^k)$
 $\frac{(\rho(A))^k}{(\rho(A))^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (\rho(A))^k = 0$

$\forall A$ on a $\rho(A^k) \leq N(A^k)$
 $\frac{(\rho(A))^k}{(\rho(A))^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$
 $\Rightarrow \rho(A) \leq (N(A^k))^{\frac{1}{k}}$

c). soit $\varepsilon > 0$; $A_\varepsilon = \frac{A}{\varepsilon + \rho(A)}$
 $\rho(A_\varepsilon) = \frac{\rho(A)}{\varepsilon + \rho(A)} < 1$

$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A_\varepsilon^k = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} N(A_\varepsilon^k) = 0$

li $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(A^k)}{(\varepsilon + \rho(A))^k} = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon' > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \geq k_0$
 $\frac{N(A^k)}{(\varepsilon + \rho(A))^k} < \varepsilon'$
 $\Downarrow$
 $\rho(A) = 1$

d) On a: $\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall k \geq k_0$
 $N(A^k) \leq (\epsilon + e(A))^k$
 $\Rightarrow e(A) \leq (N(A^k))^{1/k} \leq \epsilon + e(A)$

$\Rightarrow |N(A^k)^{1/k} - e(A)| < \epsilon$
 $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} N(A^k)^{1/k} = e(A)$

Exercice 7.

1) Soit F un sc. ord. E .

Pq. F sc. ord. E .

utiliser les notes.

a) $\text{Supp } \vec{F} \neq \emptyset$.

a) Pq $\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } B(\epsilon, \epsilon) \subset F$

On a $\vec{F} \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in \vec{F}$.

$\Rightarrow \exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } B(a, \epsilon) \subset F$.

si $x \in B(0, \epsilon) \Rightarrow x + a \in B(a, \epsilon) \subset F$.

$\Rightarrow x + a \in F$
 $\left. \begin{array}{l} a \in F \\ F \text{ sc. ord.} \end{array} \right\} \Rightarrow x \in F \Rightarrow B(0, \epsilon) \subset F$

b) Démontrer que $F = E$.

Soit $x \in E \setminus \{0\} \Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\epsilon}{2} \sqrt{2}$
 $\Rightarrow \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} \in B(0, \epsilon) \subset F$.

$\Rightarrow x \cdot \frac{\epsilon}{2\|x\|} \in F$
 $\left. \begin{array}{l} \text{et on a } \frac{\epsilon}{2\|x\|} \in F \\ F \text{ sc. ord.} \end{array} \right\} \Rightarrow x \in F$.

$\Rightarrow E \subset F \Rightarrow F = E$.

$$\text{Si } \left. \begin{array}{l} F \text{ d.c. } v \\ F \neq E \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{F} = \emptyset$$

3) soit H un hyperplan $\subset E$.

$$\text{Pg. } H = \overline{H} \text{ ou } \overline{H} = E.$$

$$\text{Supposons } \left. \begin{array}{l} H \neq \overline{H} \\ \text{ou } H \subset \overline{H} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists a \in \overline{H} \\ \text{et } a \notin H$$

$$H \text{ hyperplan} \Rightarrow E = H \oplus \text{vect}\{a\}$$

$$\text{ou } H \subset \overline{H}$$

$$a \in \overline{H} \text{ et } \overline{H} \text{ l.c. } a \in E \Rightarrow \text{vect}\{a\} \subset \overline{H}$$

$$\Rightarrow H \oplus \text{vect}\{a\} \subset \overline{H} \Rightarrow E \subset \overline{H}$$

ou bien:

$$\text{Soit } x \in E \Rightarrow x = \overset{e_H}{h} + \overset{e_H}{\alpha} a$$

$$\left. \begin{array}{l} h \in H \subset \overline{H} \\ a \in \overline{H} \Rightarrow \alpha a \in \overline{H} \end{array} \right\} \Rightarrow h + \alpha a \in \overline{H}$$

$$\overline{E} = \overline{H}$$

4) Soit $A \subset E$; mg. $\text{vect}(\overline{A}) \subset \overline{\text{vect}(A)}$.

Soit $x \in \text{vect}(\overline{A}) \Rightarrow x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i$
avec $x_i \in \overline{A}$.

$x_i \in \overline{A} \Rightarrow \exists (x_{in}) \subset A$ tq $x_{in} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_i$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^p \alpha_i \underbrace{x_{in}}_{\in A}}_{\in \text{vect}(A)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = x.$$

obien. $\Rightarrow x \in \overline{\text{vect}(A)}$.

$$A \subset \text{vect}(A) \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{\text{vect}(A)} = \text{vect}(\overline{A}) \subset \overline{\text{vect}(A)}.$$

Rappel.

Si $\dim E = p < \infty$, $\exists B = (e_1, \dots, e_p)$ base de E .

(n) suite d'éléments de E .

$$\forall n \in \mathbb{N}; U_n = \sum_{k=1}^p u_{n,k} e_k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l \in E \quad (l = \sum_{k=1}^p l_k e_k)$$

$$\iff \forall k \in \{1, \dots, p\}, \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n,k} = l_k$$

$$\text{Exp} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin n}{n}; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) = (0, e)$$

$$\text{App} \quad \text{Si } A_n = (a_{i,j,n}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = (a_{i,j}) \text{ si } a_{i,j} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{i,j,n}$$

Série dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans E

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \text{ existe dans } E$$

$$\text{1) Si } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \in E$$

$$\text{2) Si } \sum_{n \geq 0} u_n \implies R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \in E$$

$$\text{3) } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV} \iff \sum_{n \geq 0} \|u_n\| \text{ CV}$$

$$\text{4) Si } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est abs CV} \implies \text{CV}$$

$$\text{et } \left\| \sum_{n=0}^N u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^N \|u_n\|$$

$$\text{5) } u_n = \sum_{k=1}^p u_{n,k} e_k$$

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV} \iff \forall k \in \{1, \dots, p\}, \sum_{n \geq 0} u_{n,k} \text{ CV}$$