

Def  $V(x_n) \subset A$ ,  $\exists (x_{n(n)})$  S. suite de  $(x_n)$  s.t.  $x_{n(n)} \rightarrow x \in A$

Si  $A$  Compact  $\Rightarrow B$  Compact  
 $B$  fermé et  $B \subset A$

Si  $K_1$  et  $K_2$  sont des compacts de  $E$   
 $\Rightarrow K_1 \cap K_2$  est un compact.  
 $K_1 \cup K_2$  est un compact.

**$A \subset E$**   
 **$A$  est un Compact**

$A$  est un fermé et borné de  $E$

Si  $K_1$  Compact de  $E$  et  $K_2$  " de  $F$ .  
 Alors  $K_1 \times K_2$  est un compact de  $E \times F$ .

Si  $d \text{ in } E$   
 $\forall a \in E, \forall r > 0$ .  
 $B_r(a)$  et  $S(a, r)$  ont des compacts

$(x_n) \subset A = \text{Compact}$   
 $(x_n)$  converge  $\Leftrightarrow$   
 $(x_n)$  admet une seule valeur d'adhérence.

Si  $f: A \subset E \rightarrow F$  Continue et  $A = \text{Compact}$  de  $E$ .  
 $\Rightarrow f(A)$  Compact de  $F$ .  
 $f$  est bornée.

Si  $d \text{ in } E$   
 Si  $(x_n)$  suite bornée,  $\exists (x_{n(n)})$  CV.  
 Sous suite de  $(x_n)$  CV.  
 $n \in B_r(0, r)$

Si  $d \text{ in } E$   
 Si  $(x_n)$  est bornée et atteint une seule valeur d'adhérence.  
 Alors  $(x_n)$  CV.

Si  $f: A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  Continue.  
 $A$  Compact  $\neq \emptyset$   
 Alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes.  
 $\sup_{x \in A} f(x) = f(m)$   
 $\inf_{x \in A} f(x) = f(M)$

Req. si  $K_1$  compact  $\hookrightarrow E \Rightarrow K_1 \times K_2$  est compact  
 et  $K_2 \text{ " } \hookrightarrow F \hookrightarrow E \times F$ .

soit  $(z_n)$  suite d'éléments  $\hookrightarrow K_1 \times K_2$ .

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : z_n = (x_n, y_n); x_n \in K_1$   
 $y_n \in K_2$

•  $(x_n) \subset K_1 = \text{compact} \Rightarrow \exists (x_{\varphi(n)})$  s.s. suite  
 $\hookrightarrow x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in K_1$

•  $(y_{\varphi(n)}) \subset K_2 \Rightarrow \exists (y_{\varphi(\varphi(n))})$  s.s. suite  $\hookrightarrow$   
 $\hookrightarrow y_{\varphi(\varphi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in K_2$

$\Rightarrow \exists (x_{\varphi(\varphi(n))}) = (x_{\varphi(\varphi(n))}, y_{\varphi(\varphi(n))}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, y) \in K_1 \times K_2$

# Exercice 6 "Série I"

$$A \neq \emptyset; A \subset E, x \in E$$

$$\forall x \in E; d(x, A) = \inf \{ \|x - a\|, a \in A \}$$

$$1) \text{ Pq. } d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$$



$$d(x, A) = 0 = \inf \{ \|x - a\|, a \in A \}$$

$$\Leftrightarrow \exists (y_n) \text{ suite d'éléments de } B \subset \mathbb{R} \text{ tq. } y_n \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow \exists (a_n) \subset A \text{ tq. } \|x - a_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x \Leftrightarrow x \in \overline{A}$$

$$\text{Exp. } d(x, ]\tau, \epsilon]) = 0.$$

$$d(x, [\tau, \epsilon])$$

$$\text{si } A \text{ est dense dans } E, (\overline{A} = E)$$

$$\forall x \in E; d(x, A) = 0$$

$$e) \text{ si } A \text{ est un fermé et. dans } E \subset \mathbb{R}.$$

$$\text{Pq } \exists a \in A \text{ tq. } d(x, A) = \|x - a\|.$$

$$\text{Soit } \alpha = d(x, A)$$

$$\Rightarrow \exists (a_n) \subset A \text{ tq. } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - a_n\| = \alpha.$$

$$\Rightarrow \text{la suite } (\|x - a_n\|) \text{ est bornée par } \|x - a_n + x\|$$

$$\leq \|x - a_n\| + \|x\|$$

$$\leq \|x\| + \|x\|$$

$$\Rightarrow (a_n) \text{ est bornée}$$

on dim  $E \leftarrow$ , alors d'après le th B.W.  
 $\exists (a_{\varphi(n)}) \leftarrow$  sous suite de  $(a_n)$  q.

$$a_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in A \text{ (car } A \text{ fermé)}$$

$$\Rightarrow \|a_{\varphi(n)} - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|a - x\|$$

$$\text{on } \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_{\varphi(n)} - x\| = d.$$

$$\Rightarrow d = d(x, A) = \|x - a\| \text{ avec } a \in A.$$

Rq.

Si  $A$  Compact  $\neq \emptyset$ , mg  $\exists a \in A$  q.  
 $d(x, A) = \|x - a\|$

Réponse: soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\forall y, z \in A. \quad y \mapsto \|x - y\|$$

$$|f(y) - f(z)| = \left| \|x - y\| - \|x - z\| \right| \leq \|y - z\|$$

$\Rightarrow f$  continue sur  $A$  qui est compact  
 et a valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

$\Rightarrow f$  est bornée et atteint ses bornes

$$\Rightarrow \exists a \in A \text{ q. } \inf_{y \in A} f(y) = f(a)$$

$$\inf \{ \|x - y\|, y \in A \} = \|x - a\|$$

$$d(x, A).$$

3) Rq.  $d(x, A) = d(x, \bar{A})$

ona.  $A \subset \bar{A}$

$\Rightarrow \{ \|x - a\|, a \in A \} \subset \{ \|x - b\|, b \in \bar{A} \} \subset \mathbb{R}$

$\Rightarrow \inf \{ \|x - a\|, a \in A \} \geq \inf \{ \|x - b\|, b \in \bar{A} \}$

$\Rightarrow \textcircled{a} d(x, A) \geq d(x, \bar{A})$

D'autre part:

soit  $a \in \bar{A} \Rightarrow \exists (a_n) \subset A$  t.  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

or:  $d(x, A) \leq \|x - a_n\|, \forall n \in \mathbb{N}$

$d(x, A) \leq \|x - a\|, \forall a \in \bar{A}$

$\Rightarrow d(x, A) \leq \inf \{ \|x - a\|, a \in \bar{A} \}$

$\Rightarrow \textcircled{b} d(x, A) \leq d(x, \bar{A})$

Rq. si  $A \subset B \subset E$   
 $\Rightarrow d(x, A) \geq d(x, B)$

$(A=B) \Rightarrow d(x, A) = d(x, \bar{A})$

4)  $H$ : l'ensemble des parties fermées de  $E$

Rq.  $d: H \rightarrow \mathbb{R}(E, \mathbb{R})$

$A \mapsto d_A: x \mapsto d(x, A)$

est surjective.

soit  $A$  et  $B$  deux parties fermées de  $E$ .

$d(A) = d(B) \Leftrightarrow d_A = d_B$

$\Leftrightarrow \forall x \in E; d(x, A) = d(x, B)$

Rq.  $A = B$

Soit  $x \in A \Rightarrow d(x, A) = 0 \Rightarrow d(x, B) = 0$

$\Rightarrow A \subset B$   
 $\Rightarrow B \subset A \Rightarrow A = B$

$\Rightarrow d$  surjective.

$\Rightarrow x \in \bar{B} = B$

5) Rq  $d_A: E \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.  
 $x \mapsto d_A(x) = d(x, A)$ .

Rq.  $d_A$  est 1-lipschitzienne.  
 Soit  $x, y \in E$ ; Rq.  $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$ .  
 on a  $\forall a \in A$ ;  $d(x, a) \leq \|x - a\|$

$$\leq \|x - a + y - y\|$$

$$\leq \|x - y\| + \|y - a\|$$

$\Rightarrow d(x, A) - \|x - y\| \leq \|y - a\|, \forall a \in A$   
 $\{ \|y - a\|, a \in A \}$  est minoré par.

$d(y, A) = \inf \{ \|y - a\|, a \in A \} \geq d(x, A) - \|x - y\|$   
 $\Rightarrow d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$   
 $x$  et  $y$  jouent des rôles symétriques.

$$\Rightarrow d(y, A) - d(x, A) \leq \|y - x\|$$

$$\Rightarrow -\|x - y\| \leq d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$$

$$\Rightarrow |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$$

$$E \subset (C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

$$5) A = \left\{ f \in E; f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \right\}$$

$$d(\emptyset, A) = \inf \{ \|f\|_\infty; f \in A \} ??$$

$$\text{on a. } \forall f \in A; \quad f(t) \leq |f(t)| \leq \|f\|_\infty$$

$$1 \leq \int_0^1 f(t) dt \leq \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \forall f \in A; \quad \|f\|_\infty \geq 1$$

$$\Rightarrow d(\emptyset, A) \geq 1.$$

Directre part on a.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad f_n(t) = \begin{cases} (1+n)t & t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 + \frac{1}{n} & t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad f_n(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f_n(t) dt = 1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad f_n \in A$$

$$1 \leq d(\emptyset, A) \leq \|f_n - 0\|_\infty = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \underline{d(\emptyset, A) = 1}$$

$f: (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  linéaire

pg  $f$  continue  $\Leftrightarrow \exists M > 0$ .

$$\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E, \forall x \in E$$

"  $\Leftarrow$  "  $\forall x, y \in E$ .

$$\|f(x) - f(y)\|_F \stackrel{\text{linéar.}}{=} \|f(x-y)\|_F \leq M \|x-y\|_E$$

$\Rightarrow$   $f$  est  $M$ -lip.  $\Rightarrow f$  continue sur  $E$ .

"  $\Rightarrow$  "  $f$  continue sur  $E$ , alors  $f$  est continue en 0.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \forall x \in E$  avec  $\|x\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq \varepsilon$

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, y = \frac{\alpha}{\|x\|_E} x \Rightarrow \|y\|_E = \frac{\alpha}{\|x\|_E} \leq \alpha$$

$$\Rightarrow \|f(y)\|_F \leq \varepsilon$$

$$\frac{\alpha}{\|x\|_E} \|f(x)\|_F \leq \varepsilon$$

$$\|f(x)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{\frac{\alpha}{\|x\|_E}} = \frac{\varepsilon}{\alpha} \|x\|_E$$

$f: E \rightarrow F$  linéaire  
et dim  $E < \infty \Rightarrow f$  est continue.

En effet.  $B = (e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$ .

$$\forall x \in E; x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \text{ (linéar.)}$$

$$\Rightarrow \|f(x)\|_F \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|f(e_i)\|_F$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \cdot \sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_F$$

$$\leq M \|x\|_E$$

$$\leq M \cdot d \cdot \|x\|_E$$

$$\text{car } \|e_i\|_E = 1$$

$f$  continue  $\Leftrightarrow$   
 $\exists \pi > 0 \text{ s.t. } \|f(x)\|_F \leq \pi \cdot \|x\|_E, \forall x \in E$

Si dim  $E < \infty$   
 Alors  $f$  est continue

$f$  est lipschitzien

$f: (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$   
linéaire continue

$f$  est unif continue sur  $E$

$f$  est continue en 0

$f$  est bornée sur  $B_F(0,1)$

$f$  est bornée sur  $S(0,1)$

si  $(x_n) \subset E$  o.e.  
 $\|f(x_n)\|_F \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$   
 ou:  $\exists (x_n) \subset B_F(0,1)$   
 $\|f(x_n)\|_F \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \neq 0$   
 $\Rightarrow f$  n'est pas continue

soit  $P_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  linéaire  
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$   
 continue

Donc  $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $d_i \in \mathbb{N}$   
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n d_i x_1^{d_i} \dots x_n^{d_i}$   
 est continue

App L'app  $P(x,y,z) = x^2 y + x y z^2$   
 det:  $T_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue  
 car elle est polynômiale  
 en les coefficients  
 de la matrice.

Th Si  $f: E \times F \rightarrow G$  bilinéaire  
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$

Si  $E \hookrightarrow \infty$  et  $F \hookrightarrow \infty$

Alors  $f$  est continu.

Th Si  $f: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow G$  multilinéaire  
 $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $E_i \hookrightarrow \infty \Rightarrow f$  continu

App Si  $f: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$   
 $(A, B) \mapsto A \cdot B$   
 est bilinéaire  
 $M_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \infty \Rightarrow$  continu.

\* Si  $E \hookrightarrow \infty$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  produit scalaire sur  $E$   
 L'app  $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est continu.

Exercice

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$

Def l'app:  $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $X \mapsto \text{tr}(X \cdot A \cdot X)$

est continu.

Soit  $g: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$   
 $X \mapsto (AX, X)$   
 est linéaire

Si  $M_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \infty \Rightarrow g$  continu.

$h: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(Y, Z) \mapsto \text{tr}(Z \cdot Y)$

$h$  est bilinéaire  
 $M_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \infty \Rightarrow h$  continu.

on  $f = \cdot \log \Rightarrow$  est continue.

\* Rq L'app  $f: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \Pi_n(\mathbb{R})$   
 $A \mapsto A^{-1}$   
est continue.

$$\text{on a } A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(\text{com } A).$$

$$\text{on a } \text{com } A = ((-1)^{i+j} \Delta_{ij})$$

$i, j$ ,  $\Delta_{ij}$  = le determinant obtenu  
en élevant la ligne  $i$  et la colonne  $j$   
= poly en les coefficients  $\forall i, j$ .

$\Rightarrow A \mapsto \text{com } A$  est continue.  
L'app  $B \mapsto {}^t B$  est linéaire.

$\Rightarrow$  continue.

L'app.  $A \mapsto \det A$  est continue  
 $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow A \mapsto \frac{1}{\det A}$  est continue.

Ainsi  $f$  est continue.