

Rappel:

$N: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une norme

Appliquons la déf

- $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
- $\forall d \in \mathbb{K}, \forall x \in E, N(dx) = |d| N(x)$
- $\forall x, y; N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

$N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
avec $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$
est un produit scalaire
 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$\Rightarrow |N(x) - N(y)| \leq N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Normes usuelles:

Dans $\mathbb{K}^n$.

$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$

$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$

$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$

$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
 $= \sqrt{\langle x, x \rangle}$

avec $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Dans $E = C([a, b], K)$

$$\forall f \in E; \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (K = \mathbb{R})$$

Exercice 1.

$$\forall f \in E; N_1(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

$$\text{soit } f \in E; \text{ b. } N_1(f) = 0$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0, 1], |f(x)| = 0$$

$$\Rightarrow f = 0$$

* soit $d \in \mathbb{R}; f \in E$

$$N_1(df) = \sup_{x \in [0, 1]} |d f(x)| = |d| \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

$$= |d| N_1(f)$$

* soit $f, g \in E$

$$N_1(f+g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) + g(x)|$$

$$\forall x \in [0, 1], |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

$$\leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |g(x)|$$

$$\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$$\|f\| = \int_0^1 e^x |f(x)| dx.$$

Soit $f \in E$ tq $\|f\| = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 e^x |f(x)| dx = 0$

$x \mapsto e^x |f(x)|$ est continue et positive.

Donc $e^x |f(x)| = 0, \forall x \in [0, 1]$

$\Rightarrow f(x) = 0 \quad " \quad " \quad \Rightarrow f = 0.$

3) $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$.

$$\|f\| = \left[(f(0))^2 + \int_0^1 (f'(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$= \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(f, g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x) dx$$

$\| \cdot \|$ est un produit scalaire

$\forall f, g \in E$.

$$\langle g, f \rangle = \langle f, g \rangle.$$

$\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

$\forall f, g, h \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\langle \lambda f + h, g \rangle = (\lambda f(0) + h(0))g(0) + \int_0^1 (\lambda f'(x) + h'(x))g'(x) dx.$$

$$= \lambda (f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x) dx) + h(0)g(0) + \int_0^1 h'(x)g'(x) dx.$$

$$= \lambda \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle.$$

$\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire / a 1^{er} variable

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire

.. soit $f \in E$.

$$\langle f, f \rangle = (f(0))^2 + \int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 0$$

.. si $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow (f(0))^2 + \int_0^1 (f'(x))^2 dx = 0$
 $\Rightarrow (f(0))^2 = 0$ et $\int_0^1 (f'(x))^2 dx = 0$
 $\Downarrow$
 $f(0) = 0$

Puis $f \in C^1 \Rightarrow (f')^2$ est continu et ≥ 0
 $\Rightarrow (f'(x))^2 = 0, \forall x \in [0, 1]$
 $\Rightarrow f'(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$

$$\Rightarrow f = c f = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow f = 0$$

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E
et par suite $\| \cdot \|$ est une norme sur E

Sur $\Pi_n(\mathbb{R})$

$$N(A) = \sqrt{h(A, A)}, \forall A \in \Pi_n(\mathbb{R})$$

Alg. N est une norme sur $\Pi_n(\mathbb{R})$

$$N(A) = \sqrt{\langle A, A \rangle}$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Pi_n(\mathbb{R}) \times \Pi_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = h(A, B)$

⑦ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$
 $\alpha \in \mathbb{R}$.

~~Verf. A11~~

$$\langle \cdot \rangle: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t A B)$$

$$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}({}^t A A)$$

$$= \sum_{i=1}^n ({}^t A A)_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n ({}^t A)_{ik} A_{ki}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki}^2 \geq 0$$

Déf. $\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0$
 $\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x), \forall x \in E$

$\sim$ est une relation d'équivalence
 dans l'ensemble des normes sur E .

Les app. $\frac{N_2}{N_1}$ et $\frac{N_1}{N_2}$
 sont bornées sur $E \setminus \{0\}$

N_1 et N_2 deux normes
 sur E .
 $N_1 \sim N_2$

Si $\dim E < \infty$, alors toutes
 les normes sont équivalentes

→ Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E
 (U_n) est bornée pour N_1 .
 $\Leftrightarrow \exists \Pi > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, N_1(U_n) \leq \Pi, \forall n \in \mathbb{N}$.

→ $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \ell \in E$.
 $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0, \|U_n - \ell\|_E < \epsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n - \ell\|_E = 0$$

Ex: soit $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$

(f_n) suite d'éléments de $E = C([0, 1], \mathbb{R})$
 - Pg $f_n \rightarrow \tilde{0}$ pour $\|\cdot\|_1$
 $\|f_n - \tilde{0}\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 $\Rightarrow f_n \rightarrow \tilde{0}$ pour $\|\cdot\|_1$.
 • $\|f_n - \tilde{0}\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n| = 1 \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 $\Rightarrow f_n \not\rightarrow \tilde{0}$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Def: $\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0$.
 $\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x), \forall x \in E$.

" $\sim$ " est une relation d'équivalence
 dans l'ensemble des normes sur E .

Les app. $\frac{N_2}{N_1}$ et $\frac{N_1}{N_2}$
 sont bornées sur $E \setminus \{0\}$.

N_1 et N_2 deux normes
 sur E .
 $N_1 \sim N_2$

Si $\dim E < \infty$, alors, toutes
 les normes sont équivalentes.

(U_n) est bornée pour N_1 .
 $\iff$
 (U_n) est bornée pour N_2 .

$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \ell$ pour N_1 .
 $\iff$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \ell$ pour N_2 .

$B_{N_2}(x, r) \subset B_{N_1}(x, r) \subset B_{N_2}(x, \beta r)$

Ex: $y \in B_{N_2}(x, r) \implies N_2(y-x) \leq r$
 $\implies \alpha \cdot N_1(y-x) \leq N_2(y-x) \leq r$
 $\implies N_1(y-x) \leq \frac{r}{\alpha}$
 $\implies y \in B_{N_1}(x, \frac{r}{\alpha})$

$$\rightarrow \forall a \in E, \forall r > 0$$

$$B(a, r) = \{x \in E; \|x - a\| < r\} = \text{ball around } a \text{ of radius } r$$

$$B_p(a, r) = \{x \in E; \|x - a\| \leq r\}$$

$$S(a, r) = \{x \in E; \|x - a\| = r\}$$

$$B_p(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$$

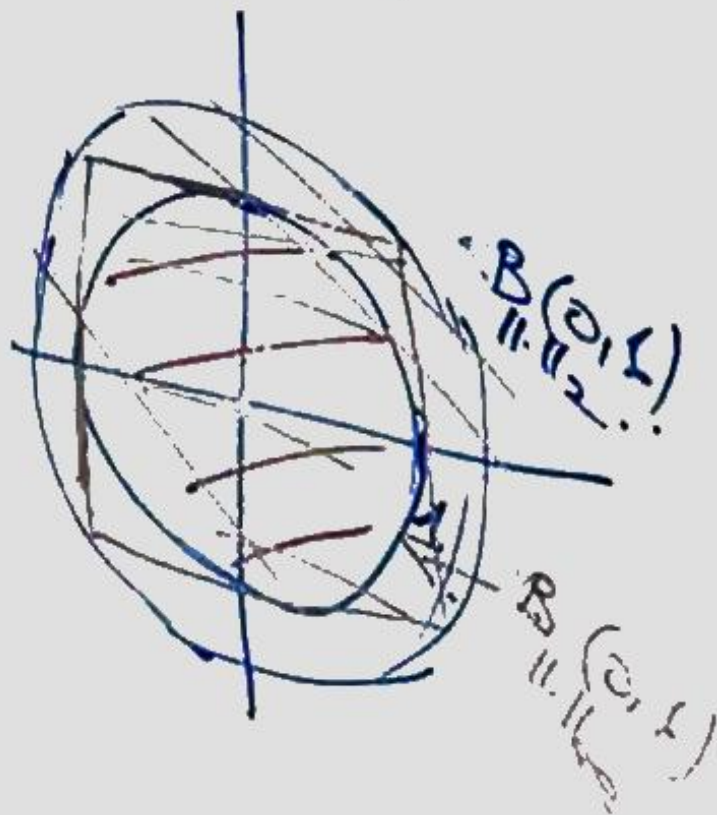
$$S(a, r) = B_p(a, r) \setminus B(a, r)$$

Def in $\mathbb{R}^2$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max(|x|, |y|)$$

$$d(x, y) = \|x - y\|$$



$\exists (U_n)$ suite d'éléments de E ?
 $\frac{N_2(U_n)}{N_1(U_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ ou 0

Les app. $\frac{N_2}{N_1}$ (ou) $\frac{N_1}{N_2}$
 n'est pas bornée, sur $E \setminus \{0\}$?

N_1 et N_2 deux normes
 sur E
 $N_1 \not\sim N_2$

E n'est pas finie

si $\exists (U_n)$ est bornée pour N_1 .
 Mais
 (U_n) n'est pas bornée pour N_2 .

$\exists (U_n)$ tel que $U_n = e$ pour N_1 .
 Mais
 $U_n \rightarrow 0$ pour N_2

Ex 6

$$e) f_n(x) = \begin{cases} 1-nx & \text{if } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{if } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0, 1]$

$$\|f_n\|_1 = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = 1$$

$$\|f_n\|_2 = \int_0^1 e^x |f_n(x)|^2 dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n}} e^x (1-nx)^2 dx$$

$$= n e^{\frac{1}{n}} - 1 - n$$

$$= n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2} \text{ n'est pas bornée} \Rightarrow \|f_n\|_1 \not\sim \|f_n\|_2$$

$$g) F = \{f \in C^1 \mid f(0) = 0\}$$

$$n_2(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) + f'(t)| = \|f + f'\|_\infty$$

$$\bullet \text{ soit } f \in F \text{ tel que } n_2(f) = 0 \Leftrightarrow \|f + f'\|_\infty = 0$$

$$\Leftrightarrow f + f' = 0 \quad (\| \cdot \|_\infty \text{ est une norme})$$

$$\Rightarrow \text{fonct. } f \text{ eq diff. } y + y' = 0$$

$$\Rightarrow \exists d \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = d e^{-x}$$

$$\text{or } f \in F \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow f = 0$$

$\frac{N_1}{N_2}$ n'est pas bornée $\Rightarrow N_1 \not\subset N_2$

3) $F = \{f \in C^1 \mid f(0) = 0\}$

$$n_1(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) + f'(t)| = \|f + f'\|_\infty$$

• soit $f \in F$ $\wedge$ $n_1(f) = 0 \Leftrightarrow \|f + f'\|_\infty = 0$
 $\Leftrightarrow f + f' = 0$ ($\|\cdot\|_\infty$ est une norme).

$\Rightarrow$ fonction l'éq diff $y + y' = 0$

$\Rightarrow \exists d \in \mathbb{R} \wedge f(x) = d e^{-x}$

$\wedge f \in F \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow d = 0 \} \Rightarrow f = 0$

* Il y a $n_1 \not\subset n_2$

Soit $f_n(x) = x^n, x \in [0,1], n \in \mathbb{N}^*$

$n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est C^1 sur $[0,1]$ et $f_n(0) = 0$
 $\Rightarrow (f_n)$ suite d'éléments de $F \setminus \{0\}$

$$n_1(f_n) = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$$

$$n_2(f_n) = \sup_{t \in [0,1]} |x^n + n x^{n-1}| = 1 + n$$

$$\Rightarrow \frac{n_1(f_n)}{n_2(f_n)} = \frac{n}{\sqrt{n+1} (n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow n_1 \not\subset n_2$

Exercice 5.

a) Soit $A, B \in M_n(K)$

a) Tq. $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$

$$\|AB\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |c_{ij}| \text{ avec } AB = (c_{ij})$$

$$\forall i, j: |c_{ij}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}|$$

$$\text{or } \forall i, k, |a_{ik}| \leq \max_{1 \leq i, k \leq n} |a_{ik}| = \|A\|_\infty$$

$$|b_{kj}| \leq \max_{1 \leq k, j \leq n} |b_{kj}| = \|B\|_\infty$$

$$\Rightarrow |c_{ij}| \leq \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty \|B\|_\infty = n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

$$\Rightarrow \max_{1 \leq i, j \leq n} |c_{ij}| \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

$$\Leftrightarrow \|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

b) Soit $A \in M_n(K)$ et $S_P(A) \neq \emptyset$

Soit $\rho = \max\{|d| : d \in S_P(A)\}$

Tq. $\rho \leq n \|A\|_\infty$

Soit $d \in S_P(A) \Rightarrow \exists X \neq 0_n$ et $AX = dX$

$$\Rightarrow \underbrace{AX}_{\in M_n(K)} = d \underbrace{X}_{\in M_n(K)}$$

$$\Rightarrow \|A \cdot x^t x\|_\infty = \|d x^t x\|_\infty$$

D'après a)

$$\|A x^t x\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|x^t x\|_\infty$$

$$\Rightarrow |d| \|x^t x\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|x^t x\|_\infty$$

$$\text{or } X \neq 0_n \Rightarrow \exists x_i \neq 0 \Rightarrow (X^t X)_{i_0 i_0} = x_{i_0}^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow X^t X \neq 0_n \Rightarrow \|X^t X\|_\infty \neq 0$$

$$\Rightarrow |d| \leq n \cdot \|A\|_\infty, \forall d, \forall p \in A.$$

$$\Rightarrow \{ |A| : \max \{ |d| : d \in \sigma_p(A) \} \leq n \cdot \|A\|_\infty \}$$

$$3) \|A\|_2 = \sqrt{\lambda(\mathbf{A}^t \mathbf{A})} = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Pg. } \|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$$

$$\text{or } \|AB\|_2^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} C_{ij}^2$$

$$\text{or } C_{ij} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{kj}^2 \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq i, j \leq n} C_{ij}^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n b_{kj}^2 \right)$$

$$\Rightarrow \|AB\|_2^2 \leq \|A\|_2^2 \cdot \|B\|_2^2$$

Déf. $\forall x \in A; \exists r > 0$
 $B(x, r) \subset A$.

A est un fermé

Exp.
 $E, \emptyset$ ouverts
 $\forall a \in E, \forall r > 0$
 $B(a, r)$ est un ouvert.

$A = \bigcap_{i=1}^n O_i$ avec $O_i =$ ouvert
finie.
 $A = \bigcup_{i \in I} O_i$ " " "
 $I \subset \mathbb{Q}$

ACE
 A est un ouvert.

A ouvert
 $\Leftrightarrow$
 $A = \overset{\circ}{A}$

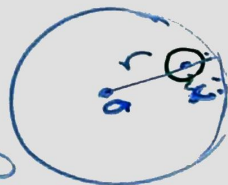
Si $f: E \rightarrow F$ continue
et $O =$ ouvert de F , alors
 $f^{-1}(O) =$ ouvert de E
 $\{x \in E \mid f(x) \in O\}$

Dans $\mathbb{R}$:
 $[a, b],]a, b[$
 $]a, a[$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$ ont des
ouverts

$B(a, r)$ est ouvert.

soit $x \in B(a, r)$

$$\exists r' = \frac{r - \|x - a\|}{2} > 0$$



Rq. $B(x, r') \subset B(a, r)$

soit $y \in B(x, r') \Leftrightarrow \|x - y\| < r'$

$$\|y - a\| = \|y - x + x - a\|$$

$$\leq \|y - x\| + \|x - a\|$$

$$< r' + \|x - a\|$$

$$< \frac{r + \|x - a\|}{2} < r$$

$$\Rightarrow y \in B(a, r)$$

$$\Rightarrow B(x, r') \subset B(a, r)$$

* $I_{a,b}$ ouvert

con.

soit $x \in I_{a,b}$

$$\exists r = \min(|x - a|, |x - b|) > 0$$

$$]x - r, x + r[\subset I_{a,b}$$

* $\bigcap_{i=1}^n O_i = \text{ouvert avec } O_i = \text{ouvert}$

soit $x \in \bigcap_{i=1}^n O_i \Leftrightarrow x \in O_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists r_i > 0 \text{ s.t. } B(x, r_i) \subset O_i$

soit $r = \min\{r_i, i \in \{1, \dots, n\}\} > 0$

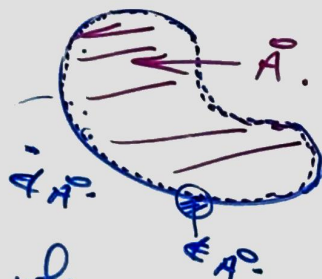
$B(x, r) \subset O_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$\Rightarrow B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^n O_i$

$\overset{\circ}{A}$: intérieur de A .

$$x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \exists r > 0 \text{ s.t. } B(x, r) \subset A.$$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset A.$$



$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{O \text{ ouvert} \\ O \subset A}} O = \text{le plus grand ouvert contenu dans } A.$$

En effet

$$x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \exists r > 0 \text{ s.t. } B(x, r) \subset A.$$

$$\Rightarrow x \in B(x, r) = \text{ouvert} \subset A.$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{\substack{O \text{ ouvert} \\ O \subset A}} O.$$

$$x \in \bigcup_{\substack{O \text{ ouvert} \\ O \subset A}} O \Leftrightarrow \exists O = \text{ouvert} \subset A \text{ s.t. } x \in O = \text{ouvert}.$$

$$\Downarrow \\ \exists r > 0 \text{ s.t. } B(x, r) \subset O \subset A \\ \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A}.$$

$$\begin{aligned} [a, b[&=]a, b[\\]a, b[&=]a, b[\\ [a, b] &=]a, b[\end{aligned}$$

$$\emptyset = \emptyset; \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}, \bigcup_{\emptyset} \emptyset = \emptyset$$

$A = \text{est un ouvert}$

Exp.

- $E, \emptyset$ fermés.
- $\forall a \in E, \forall r > 0$
 $B(a, r)$ est un fermé.

Dans $\mathbb{R}$:

$[a, b], [a, \infty[$
 $]a, a], \mathbb{R}, \emptyset$ sont des fermés.

$N =]-\infty, a[$
 ouvert.

$\Rightarrow N$ fermé

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n, n+1[= \text{ouvert}$

ACE
 $A \text{ est un fermé}$

$A \text{ fermé}$
 $A = \bar{A}$

$A = \bigcup_{i=1}^n F_i$ avec F_i fermés.

$A = \bigcap_{i \in I} F_i$
 $I \neq \emptyset$

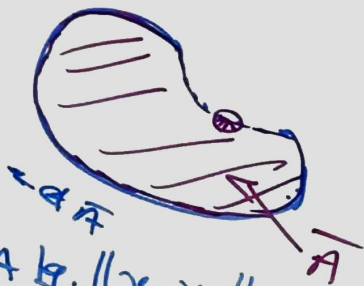
Si $f: E \rightarrow F$ continue
 et $B = \text{fermé}$ de F , alors
 $f^{-1}(B) = \text{fermé}$ de E

$\forall (x_n) \subset A$ tel que $x_n \rightarrow x$
 $\Rightarrow x \in A$

$\overline{A}$: adhérence de A .

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0; B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow A \subset \overline{A}$$



$$\forall x \in \overline{A}; \forall r > 0; \exists x_n \in A \text{ s.t. } \|x - x_n\| < r.$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* (n = \frac{1}{r}); \exists x_n \in A \text{ s.t. } \|x - x_n\| < \frac{1}{n}.$$

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n) \subset A \text{ s.t. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

"E" App à l'Ex.

$$C.A. = \overline{C_A}$$

$$\text{car } x \in C.A. \Leftrightarrow x \notin A^o.$$

$$\Leftrightarrow \forall r > 0; B(x, r) \not\subset A.$$



$$\Leftrightarrow \forall r > 0; B(x, r) \cap C_A \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{C_A}$$

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ f.c.} \\ A \subset F}} F = \text{le plus petit f.c. contenant } A.$$

Exemple

$$A^o = \bigcup_{\substack{O \text{ ouvert} \\ O \subset A}} O \Rightarrow C.A. = \bigcap_{\substack{O \text{ ouvert} \\ O \subset A}} O$$

$$\Rightarrow C_A^0 = \bigcap_{\substack{F \text{ f.c.i.} \\ C_A \subset F}} F \quad (C_0 = F)$$

$$\Rightarrow \overline{C_A} = \bigcap_{\substack{F \text{ f.c.i.} \\ C_A \subset F}} F$$

$$\Rightarrow \overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ f.c.i.} \\ A \subset F}} F$$

on dit que A est dense dans E .

$$\text{Si } \overline{A} = E.$$

Ex $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists (x_n) \subset \mathbb{Q} \text{ s.t. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

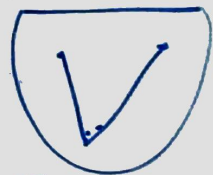
$$\Rightarrow \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Q}} \Rightarrow \mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}.$$

ou bien

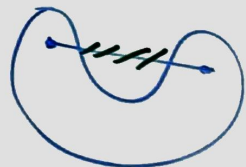
$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, \forall r > 0; B(x, r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

A est Convexe. $\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in A$.
 $[x, y] \subset A$.

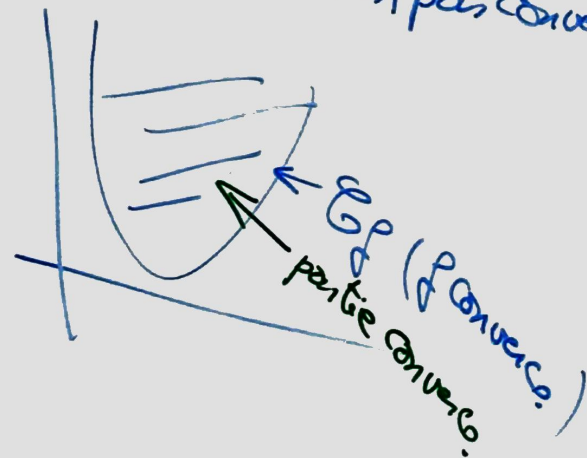
$\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in A; \forall d \in [0, 1]$
 $dx + (1-d)y \in A$.



Convexe



niest pas convexe



Exp
 soit $\mathcal{G} = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} a_{ij} \geq 0 \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \\ \text{et } \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{array} \right\}$

Rq. $\mathcal{G}$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{G}$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{G}$
 et $d \in [0, 1]$; mg. $dA + (1-d)B \in \mathcal{G}$.

$d_{ij} = \underbrace{d}_{0 \leq d \leq 1} a_{ij} + \underbrace{(1-d)}_{0 \leq 1-d \leq 1} b_{ij} \geq 0$.

et $\sum_{j=1}^n d_{ij} = d \sum_{j=1}^n a_{ij} + (1-d) \sum_{j=1}^n b_{ij} = d + (1-d) = 1$.

Exercice 3 "Série II"

1) Soit $x \in E$ et $r > 0$.

Rq $B(x, r)$ convexe.

Soit $y, z \in B(x, r)$ et $d \in [0, 1]$.

$$\Downarrow \quad \|y - x\| < r \text{ et } \|z - x\| < r.$$

Rq. $dy + (1-d)z \in B(x, r)$.

$$\begin{aligned} \|dy + (1-d)z - x\| &= \|d(y-x) + (1-d)(z-x)\| \\ &\leq d\|y-x\| + (1-d)\|z-x\| \\ &< dr + (1-d)r = r. \end{aligned}$$

$\Rightarrow B(x, r)$ convexe.

$B_p(x, r)$ est convexe.

$S(x, r)$ n'est pas convexe.

Con. Soit $y \in S(x, r)$
 $ex - y \in S(x, r)$

Plan $\frac{1}{2}(2x - y) + \frac{1}{2}y = x \notin S(x, r)$

2) Soit A une partie convexe.

Rq $\overline{A}$ " " "

Soit $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{A}$ et $d \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \exists (x_n) \subset A \text{ s.t. } x_n \rightarrow x & \quad \exists (y_n) \subset A \text{ s.t. } y_n \rightarrow y \\ dx + (1-d)y = \lim_{n \rightarrow \infty} d x_n + (1-d)y_n & \in A. \end{aligned}$$

$\Rightarrow dx + (1-d)y \in A$.
 $x, y \in A$, et A convexe $\Rightarrow dx + (1-d)y \in A$.
 $d \in [0, 1]$

$$\exists a) x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \exists r_1 > 0 \text{ s.t. } B(x, r_1) \subset A$$

$$y \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \exists r_2 > 0 \text{ s.t. } B(y, r_2) \subset A$$

$$\text{Soit } r = \min(r_1, r_2) > 0$$

$$B(x, r) \subset B(x, r_1) \subset A$$

$$B(y, r) \subset B(y, r_2) \subset A$$

$$b) z = dx + (1-d)y; \text{ soit } w \in B(z, r)$$

$$\text{Pg. } w + (1-d)(x-y) \in B(x, r)$$

$$\|w + (1-d)(x-y) - x\| = \|w - dx - (1-d)y\|$$

$$= \|w - z\| < r$$

$$\text{donc } w + d(y-x) \in B(y, r)$$

$$\text{ona } x = w + (1-d)(x-y) \in B(x, r) \subset A$$

$$y = w + d(y-x) \in B(y, r) \subset A$$

$$A \text{ Convexe} \Rightarrow \lambda x + (1-d)y \in A$$

$$w'' \in A$$

$$\Rightarrow B(z, r) \subset A$$

$$\text{Donc } z \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow \overset{\circ}{A} \text{ est Convexe}$$

Exercice 4.

$$1) a) \underline{A \subset B}, \text{ mg. } \underline{\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}}$$

$$\text{Soit } x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow \exists r > 0 \text{ s.t. } B(x, r) \subset A \subset B$$

$$\Rightarrow x \in \overset{\circ}{B}$$

$$* \text{Pg. } \underline{\overline{A} \subset \overline{B}}$$

$$\text{Soit } x \in \overline{A}$$

$$\text{or } A \subset B \Rightarrow (x_n) \subset A \text{ s.t. } x_n \rightarrow x$$

$$\Rightarrow (x_n) \subset B$$

$$\Rightarrow x \in \overline{B}$$

$$\Rightarrow x \in \overline{B}$$

$$\overline{\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{e}\}} = \mathbb{R}. \quad \underline{\text{car}} \quad \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{e}\} \\ \Rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{e}\}}$$

$$\bullet \text{ Si } A \text{ est dense dans } E \quad \left(\overline{A} = E \right) \quad \text{"IR"} \\ \text{et } A \subset B \quad \left\{ \Rightarrow B \text{ est dense dans } E \right.$$

0.

$$\bullet \text{ IN } \mathbb{U} \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} = \emptyset$$

$$\text{car. IN } \mathbb{U} \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

$$\Rightarrow \text{IN } \mathbb{U} \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{Q}^0 = \emptyset$$

$$\bullet \text{ Si } B \subset E \text{ et } \overline{B} = \emptyset \\ \text{et } A \subset B \quad \left\{ \Rightarrow \overline{A} = \emptyset \right.$$

$$b) \text{ Tq } A \cap B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$$

$$\text{"} \subset \text{" ma } A \cap B \subset A \Rightarrow \overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A}$$

$$A \cap B \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{B}$$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$$

$$\text{"} \supset \text{" soit } x \in \overset{\circ}{A \cap B} \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A} \text{ et } x \in \overset{\circ}{B}$$

$$\Rightarrow \exists r_1 > 0 \text{ tq } B(x, r_1) \subset A$$

$$\exists r_2 > 0 \text{ tq } B(x, r_2) \subset B$$

$$\Rightarrow \exists r = \min(r_1, r_2), B(x, r) \subset A \cap B$$

$$\Rightarrow x \in \overset{\circ}{A \cap B}$$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$$

$$\text{et ma } A \subset A \cup B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$$

$$B \subset A \cup B \Rightarrow \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$$

$$c) \text{ En général } \overset{\circ}{A \cup B} \neq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$$

$$\text{Pour } A = [0, 1] \text{ et } B = [1, 2]$$

$$\overset{\circ}{A \cup B} = [0, 2] =]0, 2[$$

$$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} =]0, 1[\cup]1, 2[$$

ou bien

$$A = \emptyset \text{ et } B = \mathbb{R} \setminus \emptyset$$

$$\overset{\circ}{A \cup B} = \emptyset$$

$$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = \mathbb{R}$$

2) $F_r(A) = \overline{A} \setminus \overset{\text{fermé}}{\overset{\circ}{A}} = \overline{A} \cap \overset{\text{fermé}}{\overset{\circ}{A}^c}$
 $= \text{fermé}$

• $F_r(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \overset{\circ}{\mathbb{Q}}$

or $\mathbb{Q}$ est un fermé $\Rightarrow \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$.
 et $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$)

$\Rightarrow F_r(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

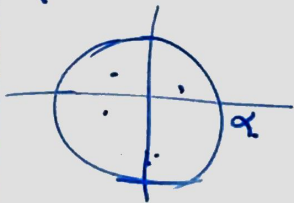
• $F_r(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$.

• $F_r([a, b]) = \{a, b\}$.

• $F_r([-\infty, b]) = \overline{[-\infty, b]} \setminus \overset{\circ}{[-\infty, b]}$
 $= [-\infty, b] \setminus]-\infty, b[$
 $= \{b\}$

3) a) $A \in \mathcal{O}_n(K)$

By $\forall \alpha > 0; \exists \varepsilon \in K$ $0 < |\varepsilon| < \alpha$ et $A + \varepsilon I_n$ inv.



$\Downarrow$
 $\det(\varepsilon I_n + A) \neq 0$
 $\Downarrow$

$\chi_{-A}(\varepsilon) \neq 0$
 $\Downarrow$

ε n'est pas VP de $-A$.

- A admet un nombre de VP.

$\Rightarrow \exists \varepsilon \in K$ $0 < |\varepsilon| < \alpha$ et ε n'est pas VP de $-A$.

$\Updownarrow$
 $\det(\varepsilon I_n + A) \neq 0$
 $\varepsilon \cdot A + \varepsilon I_n$ inv.